

श्री

अकगणित.

दुसराभाग

अध्याय.

इसवी सन १८६६.

मे.

शके १७८८ क्ष.
संवत्

वशाखवद्य

मुद्राया मुद्रायेय काशिनाथवामदेव स्वाडेन त्याणा

आपलेचंद्रप्रकाशछा

छापिलं.

अनुक्रमणिका

प्रकरण.	प्रकरण.
हार्दप्रकाशकचिह्नं	वर्गमूलकादायचं
यवहारीअपूर्णांक	घनमूल कादायचं
यवहारीअपूर्णांकान्तरूपमैद	कोणतेंहीमूलकमयाचं
,, मिळवणी	वर्ग, घन, आधिसुखेंकादा
,, वजावाकी	याचें कोष्टक
,, गुणाकार	उत्तरगुणेतरप्रमाण आणियेदी
,, भागाकार	गणितप्रमाणआणियेदी
,, चेंबराशिक	प्रमितप्रमाण आणियेदी
दशांशअपूर्णांक	सर्कन
,, मिळवणी	एकेरीसर्कन
,, वजावाकी	दुहेरीसर्कन
,, गुणाकार	संख्याज
,, भागाकार	चक्रवाटव्याज
,, रूपमैद	मध्यमिश्रगणित
दशांशचेंचेंबराशिक	सुखममिश्रगणित
उदशांश	एकेरीदशराशि
वातकर्म	दुहेरीदशराशि
मूलकर्म	गणितांतलीं कायानेप्रश्न

अपूर्णांक.

कार्यप्रकाशकचिन्हें.

गणित आणि बीजगणित यांमध्ये कितीएककामाची प्रकाशक प्रणजे दारवविणारीचिन्हें आहेत तीं लिहितों.

- + हेचिन्ह अधिक करण्याचें म्हणजे मिळविण्याचें, हेंधनचिन्ह.
- हें उणे करण्याचें म्हणजे वजाकरण्याचें. हें ऋणचिन्ह.
- + हेगुणण्याचें.
- ÷ हेभागण्याचें.
- ∴ हेसाशिंगणितकरण्याचें.
- = हेह्यणजेशब्दाचें किंवा बराबर.
- ✓ हेवर्गमूळ करण्याचें.
- √ हेघनमूळ करण्याचें.

यांची उपयोग स्थळे.

- ५+३ यांत ५ आणि ३ यांची मिळवणी करावी, असें मध्यचिन्ह दारववितें.
- ६-२ यांत ६तून २उणेकरावे, म्हणजे साहांत दोन वजा करावे.
- ७+३ यांत ७ नी तीन गुणावे, हें मध्यचिन्ह दारववितें.
- ८÷४ यांत आठ चोंहोनी भागावे, असें मध्यचिन्ह दारववितें.
- २:३::४:६ यांत जसे दोन तिहींस तसे चार साहांस.
- ७२ यांत सातांचावर्गकरावा हें तोवरचा लहान अंक दारववितो.
- ८३ यांत आठांचा घनकरावा हें तो वरचा लहान अंक दारववितो.
- ✓३ किंवा ३ यांत तिहींचें वर्गमूळ करावें.
- √५ किंवा ५ यांत पांचांचें घनमूळ करावें.

व्यवहारीअपूर्णांक.

कोणताही अवयवी किंवासंख्यापूर्ण अथवा अखंड जाणून, त्या चे कितीही खंड केलेतरी त्या खंडांचा सूचकांस अपूर्ण म्हणतात. जसें, जर, मूळ अवयवीचे आठ भागकेलेतर त्याभागांतून ३, ५, ७,

इत्यादि भाग घेतात त्यांस अपूर्णहणतात; आणि त्याची लिहिण्याचीरीति याप्रमाणे आहे.

३, ३, ३ इत्यादि. रेघेचारवाल्चा आंगास जी संख्या आहे तीस छेद हणतात, कांकीं मूळ अवयवी किती भागांनी छेदिला आहे ते ती दारविते आणि रेघे चारवा वरच्या आंगास जी संख्या आहे तीस अंश भसेहणतात, कांकीं मूळ अवयवीचा अपूर्णपणा दारववाया साठीं त्याकेलेले छेदांतून किती भाग घेत ले आहेत हे ती दारविते. यारूपाच्या संख्येस दशांश अपूर्णकाचा भेद दारववाया साठीं व्यवहारी अपूर्णांक असें नाव ठेविले आहे.

व्यवहारी अपूर्णांकांत कांहीं भेद आहेत; जसे, सम, विषम, भागजाती, प्रभागजाती, भागानुबंध अपूर्णांक इत्यादि.

सम अपूर्णांक तोच होय, ज्यांत अंश छेदांहून उणे आहेत; जसे, $\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{2}{4}$ अथवा $\frac{3}{6}$

विषम अपूर्णांक तोच होय, ज्यांत अंश छेदांच्या बराबर किंवा अधिक आहेत; जसे, $\frac{1}{3}$ अथवा $\frac{2}{3}$ अथवा $\frac{4}{3}$ या प्रकारास विषम असें नाव ठेवायचे कारण हेच आहे कीं, असा अपूर्णांक एकेचे बराबर किंवा एकापेक्षा अधिक आहे.

भागजाति अपूर्णांक तोच होय, ज्यांत एकेसगळे वस्तूचा तुकडा केवळ अपूर्णांकच आहे; जसे, $\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{1}{3}$

प्रभागजाति अपूर्णांक तोच होय, ज्यांत अपूर्णकाचा अपूर्णांक, अथवा किंवा एक अपूर्णांकामध्ये चालिहून जे जोडले असतात, जसे, $\frac{1}{2}$ चा $\frac{1}{3}$ अथवा $\frac{2}{3}$ चे $\frac{1}{2}$

भागानुबंध पूर्णांक तोच होय, ज्यांत पूर्णांक तिहून त्यापुढे जवळच अपूर्णांक लिहिला आहे; जसे, $1\frac{1}{2}$ अथवा $1\frac{2}{3}$ अथवा $2\frac{1}{3}$

मिश्र अपूर्णांक तोच आहे, ज्याचे अंश आणि छेद दोनही सम, विषम, अथवा भागानुबंध आहेत; जसे, $\frac{1}{2}$, अथवा $\frac{1}{3}$ अथवा $\frac{2}{3}$ अथवा इत्यादि. हे सर्व मिश्र अपूर्णांक आहेत.

कोणत्याही पूर्णांकास छेदस्थळां एक लिहित्यानें अपूर्णकाचें रूप तें; जसे, जर १ या पूर्णांकास अपूर्णकाचें रूप द्यावयाचें आहे तर त्या लिहिण्याची रीति ३ अशी आहे जसे $\frac{1}{3}$ इत्यादि.

कोणताही अपूर्णांक भागाकार दारवितो; म्हणून अंश छेदांनीं गून जो भागाकार उत्पन्न होतो त्याचे बराबर त्या अपूर्णकाचा भाव आहे.

जसें ११ या अपूर्णाकाचा भाव ३ याचे बराबर आहे; आणि ११ याचा भाव ३ याचे बराबर आहे.

व्यवहारी अपूर्णाकांचा रूपभेद.

व्यवहारी अपूर्णाकांचा रूपभेद ह्मणजे त्यास एका रूपांतून किंवा नावांत दुसऱ्या रूपांत किंवा नावांत आणण्याचा प्रकार आहे, आणि व्यवहारी अपूर्णाकांची मिळवणी, रजाबाकी इत्यादि करायासाठीं अगोदर त्यास हा प्रकार केला पाहिजे; असा रूपभेद यावयाचे किती एक प्रकार आहेत. आहेत.

द्वत्य.

दोन किंवा अधिक संख्यांचा दृढ भाजक काढावाचें.

दोन किंवा अधिक संख्यांचा दृढ भाजक तीच संख्या आहे, जी त्या संख्यांस निःशेष भागिते: जसें, १० आणि २० या दोन संख्या २, ३, ६, यांणीं निःशेष भागितल्या जातात, परंतु यांत मोठी संख्या ६ तीस दृढ भाजक ह्मणतात.

रति

जर दोन संख्या मात्र असतील, तर त्यांत जी मोठी संख्या असेल ती लाहान संख्येने भागावी; नंतर, बाकी राहिलेला नवा भाजक करून त्याणें पूर्वे भाजक भागावा; याप्रमाणें शेवटील बाकीनें तत्पूर्वे भाजक पुनः पुनः भागितां ज्या भाजकाने शेवटील भाज्य निःशेष होईल तो उच्छिद्य संख्यांचा दृढ भाजक होय.

जेव्हां गुरुच्या दोहोंपेक्षां अधिक असतील, तेव्हां त्यांतून फलनेदोहोंचा पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें दृढ भाजक काढ; नंतर, हा दृढ भाजक आणि राहिलेली संख्या यांचा दृढ भाजक काढ; यारीतीनें जिनक्या संख्या राहिल्या असतील त्यांचा दृढ भाजक काढावा; म्हणजे शेवटील दृढ भा-

जक काटावा; म्हणजे शेवटील दटभाजक जो उत्पन्न होतोतो सर्व सांगितल्या संख्यांचा दटभाजक आहे.

जर असें होतें कीं, अशाशेतीनें दटभाजक १ मात्र नियतो; तर अशासंख्यांस अदटभाजक झणतात, म्हणजे त्यांस दटभाजक नाही; अथवा असें म्हणतात कीं त्या संख्या परस्पर अविभाज्य आहेत.

॥ अविभाज्य संख्या त्या आहेत, ज्यांस एकावाचून दुसरा भाजक निःशेष भागित नाही; जसे, २, ३, ५, ७, ११, १३, १७, इत्यादि. या संख्यांचा शोध पूर्वेकाच्या पासून चालत आहे, आणि अशी संख्या जाणाऱ्या सार्थी एक चांगलीरीति आजच्या दिवशीं अपेक्षित आहे.

(इरातासूत्रेनीम्) यानां एक मोठा ज्योतिषी मिश्रदेशांत होता, त्याणें या अपेक्षिता सार्थी एक युक्ती काढली, जीस त्याणें चालनीं असें नांव ठेविलें; कांकी त्या युक्तीनें अविभाज्य संख्या इतर संख्यांहून निराळ्या करितां येतात, आणि अशाशेतीस विषम म्हणतात कांकी फार मोठ्या विस्तारा वाचून थोडक्यांत सरळरीतीनें, कोणती ही संख्या आरंभ आहे कीं नाहीं हें समजतां येत नाहीं. अशी विस्ताररीति आजपर्यंत चालली आहे ती ही आहे.

एकापासून कोणतेही इच्छिते संख्येपावेतो सर्व विषम संख्या अनुक्रमेणें लिही, जसें,

१	३	५	७	९	११	१३	१५	१७	१९
२१	२३	२५	२७	२९	३१	३३	३५	३७	३९
४१	४३	४५	४७	४९	५१	५३	५५	५७	५९
६१	६३	६५	६७	६९	७१	७३	७५	७७	७९
८१	८३	८५	८७	८९	९१	९३	९५	९७	९९

आतां प्रथमच्या अविभाज्य संख्ये पासून आरंभ कर, आणि ती पासून नि सत्या संख्येवर एक एक बिंदु कर; कांकी तीती संख्या तिहीनी निःशेष भागिती जाते. जसे, ९, १५, २१, इत्यादि.

नंतर पांचोपासून पांचवे पांचवे स्थळीं बिंदु कर, कांकी तीती संख्या पांचानीं निःशेष भागिती जाते. जसे, १५, २५, ३५, इत्यादि.

पुनः ७ पासून सातवे सातवे संख्येवर बिंदु कर, कांकी तीती संख्या सातानीं निःशेष भागिती जाते, जसे, २१, ३५, ४९, इत्यादि.

असें केलें असती सर्व संख्या ज्या बिंदु वाचून आहेत त्या अविभाज्य संख्या जाणाऱ्या; म्हणून आणि १०० या दोहों संख्यांच्या मध्ये कोणतीही अविभाज्य संख्या नाही; कांकी जर कोणतीही संख्या कोणतेही अविभाज्य संख्येनें निःशेष भागिती जात नाही, परंतु ती अविभाज्य संख्या अशी असवीकी सांगितल्या संख्येचे वर्गमूळापेक्षा उणी; तर असे जाणावेकी सांगितली संख्या स्वतः अविभाज्य संख्या होय; सर्वसम संख्यांमध्ये २ ही सम संख्या मात्र अविभाज्य संख्या आहे. त्यानून दोहो पासून १०० पर्यंत पुढें सांगतो या संख्या अविभाज्य संख्या आहेत; २, ३, ५, ७, ११, १३, १७, १९, २३, २९, ३१, ३७, ४१, ४३, ४७, ५३, ५९, ६१, ६७, ७१, ७३, ७९, ८३, ८९, ९७.

या चालनी वाचून दुसरी थोडक्यांत कोणतीही शीत नाही, कीं जिणें करून अविभाज्य संख्या समजातें येईल; म्हणजे आजपावेतो ज्योतिषामध्ये अशाशेतीसापडली नाही.

उदाहरणे.

प्रथम, १९०८, १९३६, आणि ६३० यांचा दटभाजक काढ.
१३६) १९०८ (२ म्हणजे १९०८ आणि १३६ यांचा दटभाजक ३६ आहे.
१८७२

३६) १९३६ (२६ नंतर ३६) ६३० (१७

७२
२९६
२९६

३६
२७०
२५२

१८) ३६ (२
३६

याजकरिता सांगितल्या संख्यांचा दटभाजक १८ आहे.
दुसरे, २४६ आणि ३७२ यांचा दटभाजक काय ?

उत्तर, ६

तिसरे, ३२४, ६१२ आणि १०३२ यांचा दटभाजक काय ?
उत्तर. १२

प्रथमप्रकार.

अपूर्णाकांचा अतिसंक्षेप करायचा.

* सांगितल्या पूर्णाकांच्या पदांस कोणत्याही संख्येने भाग, कीं जि
णें निःशेष होईल; नंतर जे भागाकार येतील त्यांस नशारितीनें दुसरे
संख्येनें भाग; असें पुढेही कर जो पर्यंत एकाचान्न दुसरे कोणतेही संख्ये

* स्पष्ट आहे कीं जर सांगितल्या अपूर्णाकांचे पदांस भाजल्या एकाच अंकांनें भागिले
तर दुसरा अपूर्णाक उत्पन्न होईल, त्याचा भाव सांगितल्या अपूर्णाकाबराबर होईल. आणि
अशारितीनें जोचालेल तो पुनः पुनः भागाकार केला आहे. अथवा भाजक अनिश्चित आहे ते
काही स्पष्ट आहे कीं नवीं अपूर्णाकांची पदे जी उत्पन्न होतात त्या पक्षा संक्षेप द्यावा अशक्य.
पाहा, १, कोणत्याही संख्येचा शेवटीं जर सम अंक अथवा पूज्य असेल, तर ती स
र्व संख्या २ यांनी भागिली जाईल.

२, कोणत्याही संख्या ज्याच्या शेवटीं ५ किंवा ० आहे त्या सर्व ५ नी भागिल्या जातील.

३, जर कोणत्याही संख्याचा उजवे कडे शेवटीं ० आहे तर त्या सर्व संख्या १० नी भा
गिल्या जातील; जर दोन शून्ये असतील तर त्या सर्व संख्या १०० नी भागिल्या जातील;
जर तीन शून्ये असतील तर १००० नी भागिल्या जातील आणि असें पुढेही, हर्षज-
असा भागाकार करायचा सादीं शून्ये मात्र कापिलीं पाहिजेत.

४, जर कोणतेही संख्येचे शेवटील दोन अंक जोडणी भागिले जातील तर तीं सर्व

नें भागितां नयेईल, ह्मणजे ते शेवटील भागाकार सांगितल्या अपूर्णाक पदांचा संक्षेप झाला.

अथवा सांगितल्या अपूर्णाकाचे पदांस त्यांच्या दृढभाजकानें एकदां च भाग मग अशारीतीनें जे भागाकार येतील तीं इच्छिते अपूर्णाकाचीं पदे सांगितले अपूर्णाकाच्या पदांबराबर आहेत.

उदाहरणें.

प्रथम, $\frac{२१६}{२८८}$ यांस अतिसंक्षेपरूपदे.

$$\frac{२१६}{२८८} = \frac{७२}{८६} = \frac{३६}{४३} = \frac{१२}{१४} = \frac{६}{७} = \frac{३}{४} \quad \text{हें उत्तर.}$$

अथवा याप्रमाणे.

$\frac{२१६}{२८८} = \frac{८१}{९६}$ या करितां दृढभाजक ७२ आहे.

$$\frac{७२}{२१६} = \frac{३}{२८८} \quad \text{आणि} \quad \frac{७२}{२८८} = \frac{३}{४} \quad \text{हें उत्तर वरचेसारिखें.}$$

संख्या चोहोनी भागिली जाईल. आणि शेवटील ३ अंकजर ८ नीं भागिले जातील तर ती सर्व संख्या आठानी भागिली जाईल. असें सुट्टे ही.

५. जर कोणतेही संख्येचे सर्व अंकांची बेरीज तिहीनी किंवा नव्वांनी भागिली जाईल तर ती सर्व संख्या तिहीनी किंवा नव्वांनी भागिली जाईल.

६. जर उजवे शेवटींचा अंक सम आहे, आणि सर्व अंकांची बेरीज ६ नीं भागिली जाईल. तर ती सर्व संख्या साहानी भागिली जाईल.

७. जर कोणत्याही संख्येचे विषम स्थळींचे अंकांची बेरीज सम स्थळींचे अंकांचे बेरीजे बराबर आहे. तर ती सर्व संख्या ११ नी भागिली जाईल.

८. जर कोणतीही संख्या आपल्या वर्गमूळाहून उण्या संख्येनें निःशेष भागिली जात नाही. तर ती अविभाज्य संख्या जाणावी. ती एकावाचून कोणत्याही अंकानें भागायास अशक्य.

९. दोन आणि पांच यांशिवाय सर्व अविभाज्य संख्यांचे एकूंचे स्थळीं हे अंक असतात, १, ३, ७, किंवा ९; आणि यांशिवाय दुसऱ्या सर्व संख्या ८ कें पुरोटी आहेत ह्मणून भागिल्या जातील.

१०. जे कां कोणत्याही संख्या धन किंवा ऋण चिन्हांनी जोडिल्या असून, संख्या कोणतेही दुसरे संख्येनें भागायाचें आहेत या प्रत्येक संख्येस वेगळे वेगळे भागिले पाहिजे; जसे $\frac{१०+५-२-५+४-३}{१०+५-२-५+४-३} = १$

११. परंतु जे संख्या शून्याकाराचा चिन्हांनें जोडिली आहे तर त्यांतील एक-च संख्या भागवी. जसे

$$\frac{१०+५+३}{१०+५+३} = \frac{१०+५+३}{१०+५+३} = \frac{१०+५+३}{१०+५+३} = \frac{१०+५+३}{१०+५+३} = १ = १$$

दुसरें, $\frac{१९५}{७८०}$ यांस अतिसंक्षेप रूपदे.

उत्तर, $\frac{१}{८}$

तिसरें, $\frac{१३६}{२२५}$ यांस अतिसंक्षेपरूपदे.

उत्तर, $\frac{२}{३}$

चवथें, $\frac{५३५}{६२०}$ यांस अतिसंक्षेपरूपदे.

उत्तर, $\frac{५}{६}$

दुसरा प्रकार.

भागानुबंध पूर्णोकास बरोबर भावाचें वि
षम अपूर्णोकाचें रूप द्यावयाचा.

* पूर्णोकास अपूर्णोकाचे छेदानीं गुण आणि त्या गुणाकाराशीं अंशभि
कीव; नंतर ही बेरीज अपूर्णोकाचे वरले आंगास अंशस्थळीं लिही, म्हण
जे इच्छितें काम झालें.

उदाहरणें.

प्रथम, $२३ \frac{३}{८}$ यांस बराबर भावाचें अपूर्णोकाचें रूपदे.

$\frac{३}{८}$ अथवा याप्रमाणें $(२३ + \frac{५२}{८}) + २ = \frac{१९५}{८}$ हें उत्तर.

दुसरें, $१२ \frac{७}{९}$ यांस बराबर भावाचें अपूर्णोकाचें रूपदे.

उत्तर, $\frac{११५}{९}$

तिसरें, $१४ \frac{७}{१०}$ यांस बराबर भावाचें अपूर्णोकाचें रूपदे.

उत्तर, $\frac{१२७}{१०}$

चवथें, $१८३ \frac{५}{२५}$ यांस बराबर भावाचें अपूर्णोकाचें रूपदे.

उत्तर, $\frac{३६४८५}{२५}$

* स्पष्ट दिसतें कीं वर्गीरीति उघडी आहे कां कीं कोणत्याही भूवयवीस भक्त्यासं-
ख्येने गुणावें आणि तो गुणाकार त्याच संख्येने भागावा ही दोनही बरोबर भावाचें आहेत
म्हणजे भक्तही अपूर्णोका हेंच दाखवितात, कीं अंशास छेदानीं भागावें.

तिसराप्रकार.

विषमअपूर्णाकासबरोबर भावाचें पूर्णाकाचें अथवा
भागानुबंध पूर्णाकाचें रूप द्यावयाचा.

* अंश छेदनीं भाग, भागाकार येईलतो इच्छितापूर्णाक अथवा
भागानुबंध पूर्णाक होईल.

उदाहरणे.

प्रथम, $\frac{१३}{३}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

आतां $\frac{१३}{३}$ अथवा $१२ \div ३ = ४$ हें उत्तर,

दुसरें, $\frac{१५}{७}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

आतां $\frac{१५}{७}$ अथवा $१५ \div ७ = २ \frac{१}{७}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{७४९}{१७७}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

याप्रमाणे $१७७ \overline{) ७४९८४४} \frac{१}{१७}$ हें उत्तर.

$$\begin{array}{r} ६८ \\ ६९ \\ \hline १ \end{array}$$

चवथें, $\frac{५६}{७}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

उत्तर. ८

पांचवें, $\frac{१३६३}{२५}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

उत्तर. $५४ \frac{१३}{२५}$

साहायें, $\frac{२९१८}{१७}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

उत्तर, $१७१ \frac{११}{१७}$

चौथाप्रकार.

पूर्णाकास बरोबर भावाचें अपूर्णाकाचें रूप द्यावया
चा, ज्याचे छेद सांगितले सरव्ये बरोब
र होतील.

* स्पष्ट आहे की, ही शक्ति पूर्व शीताचीच उलट आहे; आणि इवें कारण सरळ भागा
काराचे गुणापासून प्रकट आहे.

* पूर्णोकांस सांगितले छेदानीं गुण; आणि त्यागुणाकारारवालीं सांगितले छेदलिहि, त्यागजे इच्छिते अपूर्णोकरूप झाले.

उदाहरणें.

प्रथम, यांसबरोबर भावाचें अपूर्णोकाचें रूपदे,
ज्यास छेद ७ होतील.

आतां $९ + ७ = ६३$; तेव्हां $\frac{६३}{७}$ हें उत्तर.

म्हणजे $\frac{६३}{७} = ६३ \div ७ = ९$ हा ताळा.

दुसरें, १२ यांस बरोबर भावाचें अपूर्णोकाचें रूपदे,

ज्यास छेद १२ होतील.

तिसरें, २७ यांस बरोबर भावाचें अपूर्णोकाचें रूपदे. उत्तर, $\frac{१५६}{११}$

ज्यास छेद ११ होतील.

उत्तर, $\frac{२९७}{११}$

पांचवा प्रकार.

प्रभाग जाति अपूर्णोकांस बरोबर भावाचें भाग जाति अपूर्णोकाचें रूप द्यावयाचा.

* अंशाकरितां सर्व अंशपरस्परगुण. आणि छेदांकरितां सर्व छेद परस्पर गुण. ते नवे अंश छेद इच्छिते अपूर्णोकरूप झाले.

प्रभाग जाति अपूर्णोकांमध्ये जर पूर्णोकरूप अथवा भागातुबंधपूर्णोकरूप असेल. तर त्यास पूर्वरीतीनें अपूर्णोकाचें रूप द्यावें.

जर अपूर्णोकांतील भलतीं अंशछेदरूप दोन पदे भलते — एका अंकांनें निःशेष भागिलीं जातील तर ते भागाकार त्यांचे स्थळीं कामांत घेतां येतील; अथवा अंशछेदरूप कोणतींही दोन पदे समान असतील तर तीं रद्द करितां येतील.

* यांन गुणाकार आणि भागाकार हे दोनही कामांन आणिले आहेत, याजकरितां उ सन् झालेले फळ सांगितले अवयवीचें बरोबर भावाचें, होईल.

* यांन सत्यता याप्रमाणे दारवाडली जाते, सांगितले प्रभाग जाति अपूर्णोकांचे असावे. आतां छेदाचा $\frac{१}{२} = \frac{७+३}{२} = \frac{१०}{२}$; याजकरितां छेदेचे $\frac{१०}{२} = \frac{१०}{२} + २ = \frac{१४}{२}$; म्हणजे या अपूर्णोकाचे अंश सांगितले अपूर्णोकाचे अंशाचे गुणाकाराबरोबर आहेत, आणि यांचे छेद सांगितले अपूर्णोकाचे छेदाचे गुणाकाराबरोबर आहेत. जेव्हां प्रभाग जाति अपूर्णोकांन दोहोंपेक्षा अधिक रकमा आहेत, तेव्हां जर प्रमाणे दोन रकमांस प्रभाग जाति रूपदून त्यांस निमरोर रकम जोडून लिहिल्या तीन रकमांचे बरोबर भावाच्या होतील; याप्रमाणे अधिक असतील तरीही.

उदाहरणें.

प्रथम, $\frac{3}{4}$ चे $\frac{3}{4}$ चा $\frac{1}{2}$ यांस बराबर भावाचें भागजाति अपूर्णाकांचें-
रूपदे.

आतां $\frac{3+3+1}{4+3+2} = \frac{7}{9} = \frac{7}{9}$ हें उत्तर.

अथवा $\frac{3+3+1}{4+3+2} = \frac{7}{9}$ दोनदिकाणीं २ आणि दोनदिकाणीं ३ रद्द केल्यानें.
दुसरें, $\frac{9}{11}$ चे $\frac{3}{4}$ चे $\frac{3}{4}$ यांस बराबर भावाचें भागजाति अपूर्णाकांचें
रूप दे.

आतां $\frac{9+3+3}{11+4+3} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$ हें उत्तर,

अथवा $\frac{9+3+3}{11+4+3} = \frac{15}{18}$ वरचेप्रमाणें दोनदिकाणीं ३ रद्द करून आणि
दोन स्थळीं ५ नी भागून.

तिसरें, $\frac{5}{6}$ चे $\frac{3}{4}$ यांस बराबर भावाचें भागजाति अपूर्णाकांचें
रूपदे.

चवथें, $\frac{5}{6}$ चे $\frac{3}{4}$ चे $\frac{3}{4}$ यांस बराबर भावाचें भागजाति
अपूर्णाकांचें रूपदे. उत्तर, $\frac{9}{12}$

पांचवें, $\frac{3}{4}$ चे $\frac{5}{6}$ चे $\frac{3}{4}$ यांस बराबर भावाचें भागजाति अ
पूर्णकांचें रूपदे. उत्तर, $\frac{3}{4}$

साहावें, $\frac{4}{5}$ चे $\frac{3}{4}$ चे $\frac{5}{6}$ चे $\frac{3}{4}$ यांस बराबर भावाचें भाग-
जाति अपूर्णाकांचें रूपदे, उत्तर, $\frac{9}{10}$

सातवें, $\frac{5}{6}$ चे $\frac{3}{4}$ आणि २ यांस बराबर भावाचें भागजाति
अपूर्णकांचें रूपदे. उत्तर, $2\frac{1}{3}$

साहावाप्रकार.

वेगळे वेगळे छेदांचे अपूर्णाकांस बरो
बर भावाचे अपूर्णाकरूप द्यावयाचा -
ज्याचे छेद सम होतील.

नवे अंशाकरितां, प्रति अपूर्णाकांचे वेगळे वेगळे अंश त्याचे त्याचे रवा-
रचे छेदांचाचून सर्व छेदांनीं गुण; आणि सम छेदांकरितां सर्व छेदां

स परस्परगुण. *

पाहा, याकामांत आणि दुसरे कितीएक कामांत जर सांगितले संख्यांमध्ये पूर्णांक, अथवा भागानुबंध पूर्णांक, किंवा प्रभागजानि अपूर्णांक असतील तर त्यांस आरंभी सांगितले पूर्वरीती करून सरळ अपूर्णाकांचे रूप दिले पाहिजे.

उदाहरणे.

प्रथम, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ आणि $\frac{5}{8}$ यांस बरोबर भावांचे समछेद अपूर्णांक रूपेद.

$$1 + 3 + 8 = 12 \text{ हा } \frac{1}{2} \text{ चा नवा अंश आहे.}$$

$$2 + 2 + 8 = 12 \text{ हा } \frac{3}{4} \text{ चा नवा अंश आहे.}$$

$$3 + 2 + 3 = 12 \text{ हा } \frac{5}{8} \text{ चा नवा अंश आहे.}$$

$$2 + 3 + 8 = 12 \text{ हा सर्वांचा समछेद आहे.}$$

याजकरिता सांगितले वेगळे वेगळे अपूर्णाकांचे बराबर भावांचे हे अपूर्णांक आहेत. $\frac{12}{12}, \frac{9}{12}$ आणि $\frac{15}{12}$

अथवा हे काम मनांत गुणाकार करून वेगळाल्या रकमां एकदांच लिहिता येतील, जसें, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8} = \frac{12}{12}, \frac{9}{12}, \frac{15}{12}$, अथवा संक्षेपाने $= \frac{6}{6}, \frac{4.5}{6}, \frac{9}{6}$.

जेव्हां नवे अंश आणि समछेद यांचा दृढीकरणा साधारण भाजक असेल, तर त्या वेगळाले संख्यांचे स्थळी त्यांचे त्यांचे कर्ते लिहि, नंतर असेवे गळे वेगळे कर्ते जे अंश आणि छेद या दोन स्थळी साधारण आहेत त्यां त्या स्थळांतून रद्द कर, म्हणजे अपूर्णाकांस अतिसंक्षेप रूप झाले ज्या पासून समछेद होतील.

दुसरे, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ आणि $\frac{1}{6}$ यांस बरोबर भावांचे समछेद अपूर्णांक रूपेद.

आतां या अपूर्णाकांस सांगितले प्रमाणे समछेद करून हे रूप होतं.

$\frac{6+6}{6+6+6}, \frac{4+6}{6+6+6}, \frac{2+6}{6+6+6}$, आतां २, आणि ३, यां संख्या ६, ६, आणि ६, यांचे अनुक्रमे भाजक आहेत; याजकरिता जर प्रथम आणि तिसरे या अपूर्णाकांत ६ राकून त्यांचे कर्ते २, आणि ३ हे लिहिले, आणि दुसरे अपूर्णाकांत ६, ६, आणि ९, यांस राकून त्यांचे स्थळी त्यांचे

* यापासून स्पष्ट झाले की, अंश आणि छेद हे एकच संख्येने गुणिल्या पासून जोनवा अपूर्णांक उगल्ले होते. तो पूर्व अपूर्णाकांचेच भावाचा त्यांचे वेगळे भावांत भेद होत नाही.

वेगळांत कोर्ते २ आणि ३ हे लिहिने. तर त्या अपूर्ण अंकास हें रूप होईल.
 $\frac{२+३+९}{२+२+३+९}$, $\frac{२+२+३+३}{२+२+३+९}$, आणि $\frac{२+२+३}{२+२+३+९}$, एथे २ आणि ३ हे दोन
 कोर्तेजे अंश आणि छेद यांत साधारण आहेत त्यांस रट करून अपूर्णांकांस
 हें रूप होतें. $\frac{९}{२+९}$, $\frac{२+३}{२+९}$, $\frac{२}{२+९}$. ह्मणजे $= \frac{९}{१६}$, $\frac{५}{१६}$, आणि $\frac{२}{१६}$ यांत जी
 १६ समछेद संख्या उत्पन्न झाली ती ४, ६, ९, यांचा साधारण गुणाकार
 आहे. अथवा या संख्यांनीं ती निःशेष भागिली जाते. आणि यारीतीनें को-
 णतेही दुसरे सांगितले संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार उत्पन्न होईल.
 परंतु अशा संख्या छेद असून त्यांचे अंशस्थळीं १ असावा.

परंतु लघुतम साधारण गुणाकार त्वरेनें काढायाची शीतीही आहे.

सांगितल्या संख्या एक ओळींत लिहि, आणि जर त्यांनील २ किंवा
 अधिक संख्या २ या अविभाज्य संख्येनें भागल्या जातात. तर त्यांस भागून
 त्यांचे भागाकार त्यांचे त्यांचे रवालीं दुसरे ओळींत लिहि, आणि ज्या भागां
 त नाहीत त्या त्यांचे रवालीं दुसरे ओळींत पुनः लिहि, = या दुसरे ओळी
 स तसेच २ नीं भाग पुढें तिसरीस, इत्यादि. असें करितां जर २ या संख्येनें
 भागिल्या जात नाहीतर ३ या अविभाज्य संख्येनें भाग त्याणेही सर्व भाग त
 नाहीतर ५, ७, इत्यादि अविभाज्य संख्यांनी भाग जोपर्यंत दोन संख्य
 भागल्या वांचून राहतील. नंतर ते सर्व भाजक आणि शेवटील ओळींनी
 ल भागाकार व भागल्या वांचून राहिली संख्या हे सर्व परस्पर गुणून जो
 गुणाकार होईल तो लघुतम साधारण गुणाकार होय.

उदाहरण, ७, २४, ४०, ४५, आणि ७२ यांचा साधारण गुणा-
 कार काढ.

२०	७	२४	४०	४५	७२
२०	७	१२	२०	१५	३६
२०	७	६	१०	१५	१८
२०	७	३	५	१५	९
२०	७	१	५	१५	१
३०	७	१	५	५	१
५०	७	१	१	१	१

तेव्हां $२ \times २ \times २ \times ३ \times ३ \times ५ \times ७ = २५२०$ हा शिल्लाल लघुतम-
 साधारण गुणाकार आहे, अथवा ७, २४, ४०, ४५, आणि ७२ या

सर्व संख्यानां हा निःशेष भागाकार शक्य आहे.

दुसरे. २७, ६६, १३५, २७५ आणि ६७५ यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ.

३१	२७	६६	१३५	२७५	६७५
३१	०	१०	४५	२७५	२२५
३१	३	२२	१५	२७५	७५
५१	१	२२	५	२७५	२५
५१	१	२२	१	५५	५
१११	१	२२	१	११	१
	१	२	१	१	१

तेह्ना $१ + ३ + ३ + ५ + ५ + ११ + २ = १४०$ या हा इच्छित लघुतम साधारण गुणाकार आहे.

जेव्हा अपूर्णोक्त अथवा भागानुबंध पूर्णोक्त सांगितले आहेत, तेव्हा शेषवल्यास विषम अपूर्णोक्तांचें रूपदे; आणि अतिसंक्षेप समलेखकादः नंतर अशांचे लघुतम साधारण गुणाकारास अशा अतिसंक्षेप सम लेखांनी भागून जो भागाकार येईल तो इच्छित अंश अपूर्णोक्तांचा लघुतम साधारण गुणाकार झाला.

उदाहरण, $४ \frac{१}{६}$, $५ \frac{१}{३}$ आणि $\frac{६}{५}$ म्हणजे $\frac{२५}{६}$, $\frac{१६}{३}$, $\frac{६}{५}$ यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ.

अपूर्णांकांस अतिसंक्षेप समलेख करून हे रूपहोते $\frac{२५}{६}$, $\frac{१६}{३}$ आणि $\frac{६}{५}$ आणि, २५, १६, १५ यांचा लघुतम साधारण गुणाकार १२० आहे. त्यास १० यांनी भागून भागाकार $१२२ \frac{१}{३}$ हा इच्छित लघुतम साधारण गुणाकार झाला.

जेव्हा सांगितले दोन अपूर्णांकांनील एकाचा छेद दुसऱ्याचे छेद सन्निःशेष सांगितो, तेव्हा त्या लहान अपूर्णांकाची दोनही पदे त्या भागाकारांनी गुण, म्हणजे दोनही भय छेद झाले.

जसे. $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{६}{५}$ यांस ममछेद कराया साठी लहान अपूर्णोक्त यास २ नी म्हणजे $० \div ४ = ०$ यांनी गुणायाचें स्वरूप मात्र आहे. असें करून त्यांस हे रूपहोते, $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{६}{५}$

आणि $\frac{३}{६९९}$ यांस समछेद कराया सार्तां $\frac{३}{६९९}$ यांचीं दोनपदे ४ याणीं गुणायाचीं, आणि $\frac{३}{६९९}$ यांचीं २नीं इतकें मात्र आहे; म्हणजे असें करून त्यांचे हें इच्छितें रूप झालें, $\frac{१९}{६९९}, \frac{१९}{६९९}$.

अथवा याप्रमाणें.

सांगितले अपूर्णाकांस अतिसंक्षेपरूप देऊन, छेदांचा लघुतमसाधारण गुणाकार काढ, नंतर त्या गुणाकारास वेगळाले सांगितले छेदांनीं भागून, जेजे भागाकार येतील, ते त्याचे त्याचे अंशांनीं गुण; नंतर त्या त्या गुणाकार अंशा रचलीं लघुतमसाधारण गुणाकार लिहि, म्हणजे सांगितले अपूर्णाकांस बरोबर भावाचें अतिसंक्षेप समछेद रूप झालें.

उदाहरण, $\frac{३}{६९९}, \frac{३}{६९९}$ आणि $\frac{१९}{६९९}$ यांस अतिसंक्षेप समछेद रूप दे.

१४, २२, १२१ यांचा लघुतम साधारण गुणाकार = १६९४

१६९४

$$\left. \begin{array}{l} \frac{१४}{१६९४} = १२१ \\ \frac{२२}{१६९४} = ७७ \\ \frac{१९}{१३१} = १४ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{हे तीन वेगळाले भागाकार ज्याणीं अंश} \\ \text{गुणायाचे आहेत.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{तेव्हां } १२१ + ३ = ३६३ \\ ७७ + ५ = ३८५ \\ १४ + १० = १४० \end{array} \right\} \text{हे इच्छिते अंश आहेत.}$$

आणि $\frac{३६३}{१६९४}, \frac{३८५}{१६९४}, \frac{१४०}{१६९४}$ हे इच्छिते अतिसंक्षेप समछेद रूपाचे अपूर्णाक झाले.

पाहा, अपूर्णाकांस समछेद रूप दिल्यानें त्यांत अधिक भावाच्या कोणता आहे हें ही सत्वर कळते, जर $\frac{३}{६९९}$ यांस समछेद रूप $\frac{३६३}{१६९४}$ हें दिल्यानें हे अधिक भावाचे आहेत हें उघड समजते, कांकी $\frac{३६३}{१६९४}$ यांहून अधिक आहेत.

दुसरीं उदाहरणें.

प्रथम, $\frac{३}{६९९}$ आणि $\frac{३}{६९९}$ यांस बरोबर भावाचें समछेद अपूर्णाक रूप दे.

उत्तर, $\frac{१९}{६९९}, \frac{३५}{६९९}$.

दुसरें, $\frac{३}{६९९}, \frac{३}{६९९}$ आणि $\frac{३}{६९९}$ यां बरोबर भावाचें समछेद अपूर्णाक

रूपदे.

उत्तर, $\frac{४०}{६०}, \frac{३६}{६०}, \frac{४५}{६०},$

तिसरे, $\frac{५}{६}, २\frac{३}{६}$ आणि ४ यांस बरोबर भावाचे समछेद अपूर्णा करूपदे.

उत्तर, $\frac{२५}{३०}, \frac{७८}{३०}, \frac{१२०}{३०}.$

चवथे, $\frac{३}{२५}$ आणि $\frac{३६}{३६}$ यांस बरोबर भावाचे समछेद अपूर्णा करूपदे.

उत्तर, $\frac{३९}{१०५}$ आणि $\frac{३६५}{१०५}.$

पांचवे, $\frac{३}{७}$ आणि $\frac{५६}{५६}$ यांस बरोबर भावाचे समछेद अपूर्णा करूपदे.

उत्तर, $\frac{६}{१४}$ आणि $\frac{६५}{१४}.$

साहावे, $\frac{३}{३}$ आणि $\frac{७}{७}$ यांस बरोबर भावाचे समछेद अपूर्णा करूपदे.

उत्तर, $\frac{१६}{३४}, \frac{१८}{३४}$ आणि $\frac{३९}{३४}.$

सानवाप्रकार.

मिथ्य अपूर्णाकांस शक्य अपूर्णाकाचे रूप द्यावयाचा.

अपूर्णाकांचे दोनही अवयवांत सरळ अपूर्णाकाचे रूपदे; नंतर प्रत्येकाचा अंश दुसऱ्याचे छेदाने गुण, हे काम पूर्वप्रमाणेच आहे, एक एक अवयव बरोबर संख्येने गुणिला असता भावांत छेद होत नाही.

जसे, $\frac{५}{३} = \frac{५}{६}$ आणि $२\frac{१}{३} = \frac{७}{३}$ आणि $\frac{३}{४} \frac{३}{२} = \frac{१७}{८} = \frac{१७}{८} + \frac{३}{८} = \frac{३४}{८}$

आठवाप्रकार.

कोणतेही अपूर्णाकाचा भाव आपले पूर्णाकाचे अवयवांत काढावयाचा.

पूर्णाकांत जर अनेक भावांचे अवयव आहेत तर त्यांस विविध गुणाकार रीतीने अंशांनी गुणावे, आणि तो गुणाकार विविध भागाकार रीतीने छेदांनी भाग.

अथवा जर पूर्णाक कोणतेही भावाचा १ या संख्येचा असेल तर त्यांत त्याचे रवानचे भावांचे किती अवयव आहेत त्या संख्येने अंश गुणावा, आणि तो गुणाकार छेदांनी भागावा. नंतर जर काही शेष राहील, तर त्या भावाचारवानचे भावाचे अवयव त्या एकांत किती आ

हेत त्या संख्येन तें शेषरुणाचें, आणि तो गुणाकार पूर्व प्रमाणें छेदानीं भागावा, इच्छा असेल त्यापावतीं पुढें असेंच कर, नंतर वेगळाले उत्पन्न झालेले भागाकार एक ओळींत त्याचे त्याचे स्थळीं लिहावे, हणजे अ पूर्णांकाचा इच्छिता भाव झाला. ‡

उदाहरणें.

प्रथम, २ रुपये ३ पावले याचे ८ काय आहेत. शीतीचे प्रथम रूपानें.

$$\begin{array}{r} \text{रु. पा.} \\ २. ३ \\ ४ \\ \hline १०९० \end{array}$$

रु. २. ००. ०० हे उत्तर.

दुसरे, १ रुपयाचे ३ काय आहेत. शीतीचे दुसरे रूपानें.

$$\begin{array}{r} ३ \\ ४ \\ \hline १२ \\ १०० \\ \hline ३१२०० \\ \hline ६२३ \end{array}$$

उत्तर. पा. २. ६६. ३

तिसरें, १ रुपयाचे ३ हे पूर्णांक किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर. रु. पा. ३. ३३. ३

चवथें, १ रुपयाचे ३ हे पूर्णांक किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर. रु. पा. ३. ३३. ३

पांचवें, ५ रुपयांचे ३ हे पूर्णांक किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर. रु. पा. ३. ३३. ३

साहाबें, २ रुपये ३ पावले ५० पैयांचे ३ हे पूर्णांक किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर. रु. पा. ६. ००. ०

सातवें, १ मणाचे ६ हे वजनी पूर्णांक किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर. ३२ शेर.

आठवें, १ खंडीचे ६ हे केंदी पूर्णांक किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर. म. पा. ६. ००. ०

नववें, १ बिघ्याचे ९ हे पूर्णांक किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर. पा. का. १०. १०

‡ गतेंही अपूर्णांकाचा अशा भागाकाराचे शेषासारिखा कल्पिता आहे, आणि छेद भाजून सारिखा याजकरिता ही शीती आणि विधि. भागाकार ही एक जातीची आहेत. अथवा वेगवेगळीं शेषाभावां काढण्याचे शीती तें आहेत.

दाहावें, १ दिवसाचे ३ हे विलायती मानाचे पूर्णोकांत किती भागाचे
आहेत ते साग.

उत्तर, ७ १२

नववाप्रकार.

अपूर्णाकास एकजातीतून दुसरे जातींत आणायाचा.

* हलक्या रूपाचे अवयव त्याचे वरचे भारीरूपाचे एकांत किती भाग
हेत तांचिचार करावा; नंतर जर भारी रूपांतून हलक्यारूपांत आणाया-
चें आहे तर अंशास त्या संख्येने गुणावा. परंतु जर हलक्यारूपांतून
भारी रूपांत त्यावयाचें आहेतर छेदास त्यासंख्येने गुणावा.

उदाहरणे.

प्रथम, एकरूपाचा ३ यांस रेसांत अपूर्णाकरूपदे.

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{10}{9} = \frac{50}{9} \dots \dots \text{हे उत्तर.}$$

दुसरें, एकरेसाचे ३ यांस रूपांत अपूर्णाकरूपदे.

$$\frac{3}{2} + \frac{10}{9} + \frac{1}{3} = \frac{41}{6} \dots \dots \text{हे उत्तर.}$$

तिसरें, एकरूपाचा ३ यांस रेसांत अपूर्णाकरूपदे.

$$\text{उत्तर } \frac{70}{3} \text{ रेस.}$$

चवथें, वजनी एकरूपाचे ३ यांस रंवीत अपूर्णाकरूपदे.

$$\text{उत्तर, } \frac{1}{10} \text{ रंवी.}$$

पांचवें, वजनी एकरंवीचे ३ यांस शेरांत अपूर्णाकरूपदे.

$$\text{उत्तर, } \frac{160}{9} \text{ शेर.}$$

साहावें, कैला एकरंवीचे ३ यांस रंवीत अपूर्णाकरूपदे.

$$\text{उत्तर, } \frac{1}{100} \text{ रंवी.}$$

सातवें, एकरेसाचे ३ यांस रूपांत अपूर्णाकरूपदे.

$$\text{उत्तर, } \frac{3}{200} \text{ रूपा}$$

आठवें एकरूपाचा ३ यांस रेसांत अपूर्णाकरूपदे.

$$\text{उत्तर, } \frac{100}{3} \text{ रेस.}$$

नववें, १ यावें ५५ रेस यांस रूपांत अपूर्णाकरूपदे.

$$\text{उत्तर, } \frac{1}{3} \text{ रूपा.}$$

* अंकासरूपभेद करावासाठी पूर्णोकांत चढनी उत्तरनी भाजणी शीत सोपितली आहे,
ती आणि दीर्घाति, सारख्या आहेत.

दाहावे, ३ पावले ३३ रेस यांस अपूर्णोकरूपदे.

उत्तर, $\frac{33}{100}$ रूप.

व्यवहारी अपूर्णोकांची मिळवणी.

जर अपूर्णोक समछेद आहेत, तर सर्वअंशएकत्रमिळवून त्याचेरवा
तां समछेद लिहि, म्हणजेही वेगळाले अपूर्णोकांची इच्छिती बेरीज झाली.

※ जर अपूर्णोक समछेद नाहीत तर ते समछेद करावे, आणि प्रमाण
जाति अपूर्णोक, मागजातिकरावे आणि अनेकरूप अपूर्णोक असतील
तर ते एकरूप करावे. नंतर वरसांगितल्याप्रमाणे मिळवणी करावी.
मागानुबंध पूर्णोक असल्यास विषम अपूर्णोक रूपदेऊन काम करावे,
अथवा त्यातील अपूर्णोक मात्र घेऊन मिळवणी करावी. नंतर ती बेरी-
ज पूर्णोक जोडून लिहावी.

※ अपूर्णोक समछेद केल्याचे पूर्वी पराकाष्ठा विरूप आहेत, जसे रूपया आणि रेस हे,
विरूप किंवा विजाति म्हणून त्याचा एका भाव होत नाही, परंतु त्यास जेव्हा समछेद केले
आणि एकत्र वस्तूचे अवयव झाले तेव्हा त्याचे अंशांची बेरीज अथवा वजाबाकी करून
प्रसिद्ध होते, जशी कोणतेही पूर्णवस्तूची या पासून याशीतीची सत्यता स्पष्ट आहे मिळव
णी अथवा वजाबाकी यांत. जेव्हा कितीएक अपूर्णोकांची मिळवणी करायाची आहे ते
व्हा बहुतकरून बरे आहेत. त्यातील दोन अपूर्णोक जे समछेद करण्यास सक्षम आहेत
ते घेऊन त्यास समछेद करून त्यांची बेरीज घे; नंतर ती बेरीज आणि दुसरा एक अपूर्णोक यां
स समछेद करून बेरीज घे; या प्रमाणे पुढे हो.

पाहा. २. पल्ले कोणतेही अपूर्णोक घेतले, जसे, $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{३}{५}$ हे बरोबर भावाने आहेत किंवा
नाहीत हे त्यांस समछेद केल्याने तर त्यांचे अंशा पासून प्रसिद्ध होते. याज करितां जर $\frac{३}{४} + \frac{३}{५}$,
आणि $\frac{३}{४} - \frac{३}{५}$ या प्रमाणे दोन बरोबर भावांचे गुणाकार उत्पन्न होतात, तर त्या पासून बरोबर भा
वांचे दोन नवे अपूर्णोक उत्पन्न होतील, जसे, $\frac{३५}{२०} = \frac{७}{४}$, अथवा $\frac{३५}{२०} = \frac{५५}{१००}$.

तेव्हा जर बरोबर भावांचे दोन अपूर्णोक घेतले, जसे, $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{३}{५}$ तर $\frac{३५}{२०} + \frac{३५}{१००} =$

$\frac{७}{४} + \frac{५५}{१००}$; या प्रत्येकांतून $\frac{७}{४} + \frac{५५}{१००}$ हे वजा करून हा बाकी राहील. $(\frac{३५}{२०} - \frac{७}{४}) + \frac{५५}{१००} = \frac{५५}{१००} - \frac{५५}{१००} = ०$

+ $\frac{७}{४}$ याज करितां हे अपूर्णोक रूप उत्पन्न होते $\frac{३५}{२०} - \frac{७}{४} = \frac{५५}{१००}$ अथवा $\frac{३५}{२०} = \frac{५५}{१००}$.

याशीतीने ही जर $\frac{३}{४}$ या अपूर्णोकांची पदे $\frac{३५}{२०}$ या अपूर्णोकांचे पदांशी अनुक्रमे मिळवितां
तरी ही त्यास बरोबर भावाचे रूप होतं. जसे, $\frac{३५}{२०} + \frac{७}{४} = \frac{५५}{१००} + \frac{७}{४} = \frac{५५}{१००} + \frac{१७५}{१००} = \frac{२३०}{१००} = \frac{२३}{१०}$.

अथवा सामान्यतः जर $\frac{अ}{ब}$ क. तर त्या प्रमाणे द्वारविले जाते की $\frac{अ}{ब} + \frac{अ}{उ} = \frac{अ}{ब.उ}$.
याज करितां जेव्हा बरोबर भावाने दोन अपूर्णोक आहेत, तेव्हा जर त्या दोहांचे अंशांची
बेरीज आणि छेदांची बेरीज अथवा अंशांची वजाबाकी आणि छेदांची वजाबाकी या
पासून जे नवे अपूर्णोक उत्पन्न होतील ते त्या पूर्व दोन अपूर्णोकांचे बरोबर भावांचे
आहेत, हे प्रतिपाद्य बहुत उपयोगी आहे असे पुढे प्रमाणांनीत कळेल.

उदाहरणे.

प्रथम, $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज कर.

आतां $\frac{१}{२} + \frac{१}{२} = \frac{२}{२} = १$ उत्तर,

दुसरे, $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज कर.

आतां $\frac{१}{२} + \frac{१}{२} = \frac{१०}{२०} + \frac{१०}{२०} = \frac{२०}{२०} = १$ उत्तर.

तिसरे, $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ चा $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज कर.

आतां $\frac{१}{२} + \frac{१}{२} + \frac{१}{२} = \frac{१०}{२०} + \frac{१०}{२०} + \frac{१०}{२०} = \frac{३०}{२०} = \frac{३}{२}$ उत्तर.

चवथे, $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज काय होते.

उत्तर, $१ \frac{१}{२}$

पाचवे, $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज काय होते.

उत्तर, $१ \frac{११}{२२}$

साहावे, $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज काय होते.

उत्तर, $\frac{१०}{२२}$

सानवे, $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज काय होते.

उत्तर, $१ \frac{१०३}{१०२}$

आठवे, $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज काय होते.

उत्तर, $३ \frac{२०}{२२}$

नववे, $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ चे $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज काय होते.

उत्तर, $१० \frac{१}{२}$

दाहावे, एकरूपयांचे $\frac{१}{२}$ आणि एकरूपान्याचे $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज काय होते.

उत्तर, $२ \frac{२२}{२२}$

अकरावे, एकरूपान्याचे $\frac{१}{२}$ आणि एकरूपांचे $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज काय होते.

उत्तर, $२ \frac{२२}{२२}$

बारावे, एकरूपयांचे $\frac{१}{२}$ आणि एकरूपान्यांचे $\frac{१}{२}$ आणि एकरूपांचे $\frac{१}{२}$ यांची बेरीज काय होते.

उत्तर, $३ \frac{२२}{२२}$

व्यवहारी अपूर्णाकांची वजाबाकी.

जसें भिन्नवर्गी करावयाकरितां व्यवहारी अपूर्णाक समजाति समछे दकेले, तसे नयार करावें; नंतर भारीअंशांत थोडे अंशवजाकरून बाकी राहिल त्यारवालीं समछेद दिहावें. म्हणजे इच्छिली वजाबाकी झाली.

उदाहरणे.

प्रथम, $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{1}{2}$ यांची वजाबाकी कर.

आतां $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{0}{2} = 0$... हें उत्तर.

दुसरे, $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{1}{2}$ यांची वजाबाकी कर.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} - \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{6}{8} - \frac{2}{8} = \frac{4}{8}$... हें उत्तर,

तिसरे, $\frac{5}{6}$ आणि $\frac{1}{3}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{1}{2}$

चवथें, $\frac{7}{8}$ आणि $\frac{3}{4}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{1}{4}$

पांचवें, $\frac{9}{10}$ आणि $\frac{2}{5}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{1}{10}$

साहाय्यें, $\frac{11}{12}$ आणि $\frac{1}{3}$ चे $\frac{1}{3}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{9}{12}$

सानवें, एकरूपयाचे $\frac{1}{2}$ आणि एक पावत्याचे $\frac{1}{3}$ चे $\frac{1}{3}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{1}{6}$

आठवें, रुपये, $\frac{5}{6}$ चे $\frac{1}{3}$ आणि एक पावत्याचे $\frac{1}{3}$ यांची वजा बाकी कर.

रु. पा. र.

उत्तर, $1 \dots 1 \dots \frac{1}{6}$

व्यवहारी अपूर्णाकाचा गुणाकार.

* भागानुबंध पूर्णाक असल्यानंतर त्यासविषय अपूर्णाकाचें रूप द्यावें;

* कोणतीही वस्तु अपूर्णाकानें गुणायची, यांत हाच अर्थ आहे की त्या वस्तूचे कोणता भाग घ्यावयाचे आहेत. याजकरितां प्रभागजाति अपूर्णाकासारिखें प्रसिद्ध होतें; आणि त्याप्रमाणे अंश आणि छेद परस्पर अनुक्रमें खणून नवा इच्छिला अपूर्णाक उभारल्यानंतर पाहा. जेव्हां अपूर्णाकास पूर्णाकानें गुणायचें आहे तेव्हां त्या अपूर्णाकाचे छेद त्या पूर्णाकानें निःशेष भागिले जातील तर भागून भागाकार तथील हावा म्हणजे इच्छिलें काम झालें. आणि तसें न होईतर अंश पूर्णाकानें गुणाचे म्हणजे इच्छिलें काम झालें.

नंतर सर्वअंश परस्पर गुणावे, ते अंश होतील, नसें सर्वछेद परस्परगुणावे, ते छेद होतील, म्हणजे इच्छितागुणाकार होईल.

उदाहरणे.

प्रथम, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{२}{३}$ यांचागुणाकारकायहोतो.

आतां, $\frac{१}{३} + \frac{२}{३} = \frac{३}{३} = १$ हे उत्तर.

दुसरे, $\frac{१}{३}, \frac{२}{३}$ आणि $\frac{२}{३}$ चे $\frac{१}{३}$ हे सर्व परस्परगुण.

आतां, $\frac{१}{३} + \frac{१३}{३} + \frac{२}{३} + \frac{२}{३} = \frac{१३+३}{३} = \frac{१६}{३} = ५\frac{१}{३}$ हे उत्तर.

तिसरे, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{२}{३}$ यांचागुणाकार कायहोतो.

चवथे, $\frac{१}{३}$ यांस $\frac{२}{३}$ यांनीं गुण. उत्तर, $\frac{२}{९}$

पांचवे, $\frac{१}{३}, \frac{२}{३}$ आणि $\frac{२}{३}$ हे सर्व परस्परगुण. उत्तर, $\frac{१}{९}$

साहावे, $\frac{१}{३}, \frac{२}{३}$ आणि ३ हे सर्व परस्परगुण. उत्तर, $\frac{२}{९}$

सातवे, $\frac{१}{३}, \frac{२}{३}$ आणि $४\frac{२}{३}$ हे सर्व परस्परगुण. उत्तर, $२\frac{२}{९}$

आठवे, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{२}{३}$ चे $\frac{२}{३}$ हे परस्परगुण. उत्तर, $\frac{१२}{२९}$

नववे, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{२}{३}$ चे $\frac{२}{३}$ हे परस्परगुण. उत्तर, २०

दाहावे, $\frac{१}{३}$ चे $\frac{२}{३}$ आणि $३\frac{२}{३}$ चे $\frac{२}{३}$ हे परस्परगुण. उत्तर, $\frac{२३}{२९}$

गुण.

अकरावे, $३\frac{२}{३}$ आणि $४\frac{१३}{३}$ हे परस्परगुण. उत्तर, $१४\frac{१२४}{२३९}$

बारावे, $५\frac{२}{३}, \frac{२}{३}$ चे $\frac{२}{३}$ आणि $४\frac{२}{३}$ हे सर्व परस्परगुण. उत्तर, $२\frac{२९}{२९}$

व्यवहारीअपूर्णाकाचा भागाकार.

‡ जसे गुणाकार करावयास अपूर्णांक तयार केले, तसेच भागाकार करावयास तयार करावे; नंतर अंश अंशानीं भागावे, तसे छेद छेदाने भागावे. जर दोनही निःशेष भागले जातील. असें नहोईल तर भाजकाचे अंश व छेद बदलून लिहून गुणाकाराची प्रमाणे तीं पदे परस्पर गुणावीं, म्हणजे भागाकार झाला.

उदाहरणे.

प्रथम, $\frac{2}{3}$ यास $\frac{1}{3}$ याने भाग.

आता, $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{1} = 2$ हें उत्तर.

दुसरे, $\frac{1}{2}$ यास $\frac{1}{4}$ याने भाग.

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$ हें उत्तर.

तिसरे, $\frac{1}{2}$ यास $\frac{1}{6}$ याने भाग.

उत्तर, $\frac{3}{1}$.

चवथें, $\frac{1}{4}$ यास $\frac{1}{8}$ याने भाग.

उत्तर, $\frac{2}{1}$.

पांचवें, $\frac{1}{2}$ यास $\frac{1}{6}$ याने भाग.

उत्तर, 3 .

साहायें, $\frac{1}{2}$ यास $\frac{1}{12}$ याने भाग.

उत्तर, $\frac{6}{1}$.

सातवें, $\frac{1}{3}$ यास $\frac{1}{6}$ याने भाग.

उत्तर, 2 .

आठवें, $\frac{1}{3}$ यास $\frac{1}{9}$ याने भाग.

उत्तर, $\frac{3}{1}$.

नववें, $\frac{1}{4}$ यास $\frac{1}{8}$ याने भाग.

उत्तर, $\frac{2}{1}$.

दहावें, $\frac{1}{2}$ यास $\frac{1}{4}$ याने भाग.

उत्तर, $\frac{2}{1}$.

‡ भागाकार गुणाकाराचे उलटा आहे, याजकरितां याची तीची सत्यता स्पष्ट आहे. पाहा. जेव्हां अपूर्णाकास पूर्णाकाने भागायाचें आहे, तेव्हां त्या अपूर्णाकाचे अंश पूर्णाकाने निःशेष भागिले जातील तर भाजक. भागाकार तेथे लिहावा. तसें नहोईल तर छेद पूर्णाकाने गुणावे म्हणजे शिल्लें झालें.

अकरावें, $७\frac{१}{३}$ यास $७\frac{१}{३}$ यानें भाग.

उत्तर

बारावें, $\frac{१}{३}$ चे $\frac{२}{३}$ यास $७\frac{१}{३}$ चे $\frac{२}{३}$ यानें भाग.

उत्तर, $\frac{७}{६७९}$

व्यवहारी अपूर्णोकाचें त्रैराशिक.

पूर्वरीती प्रमाणें अपूर्णोका तयार करावे; नंतर त्यांत सम आणि व्यस्त काय असेल तें पाहून त्रैराशीरीती प्रमाणें इच्छाफल उत्पन्न करावें.

उदाहरणें.

प्रथम, जर एक यार्ड बनार्थीचे $\frac{३}{४}$ यास एक रुपयाचे दे पडतात; तर एक यार्ड बनार्थीचे $\frac{३}{४}$ यास काय पडेल ?

जर या रु. या.
 $\frac{३}{४} : \frac{३}{४} :: \frac{३}{४}$

$\frac{३}{४} + \frac{३}{४} + \frac{३}{४} = \frac{९}{४} = २\frac{१}{४}$ इच्छाफल हें उत्तर.

दुसरे, जर रुपये तेढे $३\frac{१}{४}$ यास ४ रुपये २ पावले पडतात; तर १ तो-
क्यास काय पडेल ?

उत्तर, रु. पा. रे.
 $१ \dots १ \dots ३३\frac{३}{४}$

तिसरे, जर १ गलबनाचे $\frac{३}{४}$ याची किंमत २७ ३१ रु. १ पावलाहाने, तर त्या गलबनाचे $\frac{३}{४}$ याची किंमत किती होईल ?

रु. पा. रे.
उत्तर, २२ २६ ०० १६ $\frac{३}{४}$

चवथें, कलकत्यास १०० रुपयांची हुंडी घेणें तर मुंबईस १०० $\frac{३}{४}$ रुपये पडतात, तर कलकत्यास ११२०० रुपयांचे हुंडीस मुंबईस किती रुपये देणें पडतील.

रु. पा. रे.
उत्तर, १३३६० ३ ५०

पांचवें, २७ ३७ रुपये २ पावले याचें एक वर्षीचें व्याज दर शेंकडा ३३ रुपये प्रमाणें काय होईल ?

रु. पा. रे.
उत्तर, ८८ ३ ०० $\frac{३}{४}$

साहायें, एक गलबनाचा $\frac{३}{४}$ यास ७ ३० रुपये २ पावले २५ रेस पडतात, तर २५०० रुपयांस त्याच गलबनाचा कोणता हिस्सा येईल ?

उत्तर, $\frac{५००००}{३३३३३}$

सातवें, एक फूट अथवा १२ अंगुलें लांब आणि १२ अंगुलें रुंद असें फळें असावें. त्यास ७ $\frac{१}{२}$ अंगुलें रुंदीचा तरवता लांब आहे. तेव्हां त्यांतून कितीलांब घेतल्यानें बरोबर होईल. १

उत्तर, १८ $\frac{१८}{१६}$ अंगुलें.

आठवें, $२\frac{१}{२}$ यार्ड लांब आणि $२\frac{१}{२}$ यार्ड रुंद कापजाची रजई करावयाची आहे. तीस एके आंगास रेशमी अस्तर असावें, आणि ते रेशमी एक या रजईचे रुंदीचें आहे. तेव्हां कितीलांब घ्यावें म्हणजे रजईस बरोबर होईल.

उत्तर, ३१ $\frac{३१}{३२}$ यार्ड.

नववें, कोणी एक जास्त रोज १३ $\frac{१}{२}$ तास चालत असता, ३५ $\frac{१}{२}$ दिवसांत ज्या मुकामी गेला; त्याच मुकामी जाणें आहे आणि रोज ११ $\frac{१}{२}$ तास चालतो आहे, तर किती दिवस लागतील १

उत्तर, ४८ $\frac{१९५}{२२२}$ दिवस.

दहावें, एके पलटणाने ९७६ शिपाई आहेत. त्यांस नवीं उगलीं द्यावयाचीं. एक उगल्यास बनाव $२\frac{१}{२}$ यार्ड लांब आणि $१\frac{१}{२}$ यार्ड रुंदीचें लांब आहे. तेव्हां किती यार्ड लांब घेतले म्हणजे सर्व उगल्यांस पुरेल.

उत्तर, ४५३१ $\frac{३१}{३२}$ यार्ड.

दशांश अपूर्णांक.

दशांश अपूर्णांक तोच आहे. ज्याचा छेद (१०) हा अंक आहे; आणि त्याजवर इतकीं पूज्यें आहेत कीं अंशस्थळांचे अंकास जितकीं स्थळें आहेत; आणि त्यांचे लिहिण्याचा प्रकार असा आहे कीं, अंशस्थळांचा अंक लिहून त्याचे डावकडे मात्र (१०) असा बिंदु द्यावा. जसे, $\frac{११}{१०}$ म्हणजे या प्रमाणें लिहिलान. ४ आणि $\frac{३४}{१००}$ या प्रमाणें लिहिलान; २४ आणि $\frac{११४}{१०००}$ या प्रमाणें ०२४ आणि $\frac{११२४}{१००००}$ या प्रमाणें ००१२४ ! यांत इतकीं शून्यें घालिलाना कीं, अंकस्थळाची संख्या जाहीकरून छेदस्थळांचे शून्याचे संख्ये बरोबर होईल.

मिश्र संख्या तोच आहे: जींत एक पूर्णांक संख्या आणि दुसरी अपूर्णांक संख्या जोडिली आहे. त्याचा भेद मधील बिंदु करून स्पष्ट होतो. जसे, ३२५ हा आणि $३\frac{३०}{१००}$ अथवा $\frac{३३०}{१००}$ ही एकच आहे.

दशांशाचे उजवे बाजूस कितीही शून्यें ठेविली तरी त्यांचे भावांत-

न्यूनधिक होत नाही; म्हणजे ४. अथवा ४०. अथवा ४००. हे दशांश आहेत ज्यांचे भाव एकच आहेत. यांचे बरोबर $\frac{१}{१०} = \frac{१०}{१००}$. परंतु जे द्वांद-शांशाचे डावेकडे शून्ये येविली. तेव्हा त्यांचे भाव उत्तरोत्तर दशगुण न्यून होताना; जसे: ४ हा $\frac{४}{१०}$ म्हणजे चार दशांश आहेत; परंतु ०४ हा $\frac{४}{१००}$ म्हणजे चार शतांशांचे मात्र बरोबर आहे; आणि ००४ हा $\frac{४}{१०००}$ म्हणजे चार सहस्रांशांचे बरोबर आहे.

जेव्हा दशांशांत किती एक अंक लिहून पुढे सरव्यास्तव्य होते त्यांस सातदशांश म्हणतात, जसे: $१२५ \frac{१२५}{१०००} = \frac{१}{१०}$ आणि $\frac{१२५}{१०००} = \frac{२३७}{१०००}$.

जेव्हा दशांशांत एक किंवा अनेक अंक त्यांचे नेच पुनः पुनः येतात तेव्हा त्यांस आवर्त दशांश म्हणतात; जसे, १२१२१२ इत्यादि = $\frac{१}{३}$, ६६६६६६ इत्यादि = $\frac{२}{३}$, ४२८५७१४२ = $\frac{५७१}{१०००}$ इत्यादि. तसेच बहुत दुसरेही.

जसे पूर्णांकांत तसेच दशांश अपूर्णांकांत आहे कीं, उजवेकडील अंकाहून डावेकडील अंक उत्तरोत्तर दशगुण अधिक होतो आणि उजवेकडे तसाच न्यून होतो हें यापुढील कोष्टकावरून समजण्यांत येईल.

१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९	२०	२१	२२	२३	२४	२५	२६	२७	२८	२९	३०	३१	३२	३३	३४	३५	३६	३७	३८	३९	४०	४१	४२	४३	४४	४५	४६	४७	४८	४९	५०	५१	५२	५३	५४	५५	५६	५७	५८	५९	६०	६१	६२	६३	६४	६५	६६	६७	६८	६९	७०	७१	७२	७३	७४	७५	७६	७७	७८	७९	८०	८१	८२	८३	८४	८५	८६	८७	८८	८९	९०	९१	९२	९३	९४	९५	९६	९७	९८	९९	१००	१०१	१०२	१०३	१०४	१०५	१०६	१०७	१०८	१०९	११०	१११	११२	११३	११४	११५	११६	११७	११८	११९	१२०	१२१	१२२	१२३	१२४	१२५	१२६	१२७	१२८	१२९	१३०	१३१	१३२	१३३	१३४	१३५	१३६	१३७	१३८	१३९	१४०	१४१	१४२	१४३	१४४	१४५	१४६	१४७	१४८	१४९	१५०	१५१	१५२	१५३	१५४	१५५	१५६	१५७	१५८	१५९	१६०	१६१	१६२	१६३	१६४	१६५	१६६	१६७	१६८	१६९	१७०	१७१	१७२	१७३	१७४	१७५	१७६	१७७	१७८	१७९	१८०	१८१	१८२	१८३	१८४	१८५	१८६	१८७	१८८	१८९	१९०	१९१	१९२	१९३	१९४	१९५	१९६	१९७	१९८	१९९	२००
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

दशांश अपूर्णाकांची मिल्गणी.

अपूर्णाकां प्रमाणें यांतील अंक त्या त्या भावाचे अंकारवालीं अनुक्रमें लिहावे. असें केल्याने ज्या दशांश चिन्ह बिंदूनी पूर्णांक आणि अपूर्णांक यांचा भेद दारविला ते सर्व एकारवालीं एक असे एकाओळीं नयेतील. नंतर पूर्णांकरीतीने उजवेकडून आरंभ करून एक एक ओळीची वेरीज घेऊन लिहावी; आणि ज्या रकमेंत दशांश स्थळें अपूर्ण असतील तीं मोजून बेरिजेंत निक्क्या स्थळांवर अथवा दशांश चिन्हाचे ओळी रवालीं

दशांश चिन्हकरावें.

उदाहरणें.

प्रथम, २९०१४६ आणि ३१४६.५ आणि २१०० आणि ६२४१७
आणि १४१६ यांची बेरीजघे.

२९०१४६
३१४६.५
२१००.
६२४१७
१४१६

५२९९.२९८७७ ही बेरीज.

दुसरें, २७६, १९२१३, ७२०१४.९, ४१७ आणि ५०३२ यांची बेरीजघे.

उत्तर, ७७७७९ ११३.

तिसरें, ७५३०, १६२०१, ३०१४२, ९५७१३, ६७२११९
आणि ०३०१४ यांची बेरीजघे.

उत्तर, ८५१३० ९६५३.

चवथें, ३१३०९, ३५७११, ७१९५६, ७१४९८, ९७३९०
२१५, १७९ आणि ००२७ यांची बेरीजघे.

उत्तर, १७५०० ९७६८

दशांश अपूर्णाकांची वजाबाकी.

मिळवणी प्रमाणें, सर्व अंकांस आपआपले भावारवाहीं लिहावे;
नंतर पूर्णांकीनी प्रमाणें, उजवेकडून आरंभ कर, नंतर मिळवणींत सांगितल्या
प्रमाणे दशांशचिन्ह बिंदूकरावा.

उदाहरणें.

प्रथम, ९१.७३ आणि २.१३८ यांची वजाबाकी कर.

९१.७३
२.१३८

८९.५९२ बाकी हें उत्तर.

दुसरें, १. ९१८५ आणि २.७३ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, ८१९

तिसरें, ४.९०१४२ आणि २१४.८१ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, २०९.९

चवथें, २७१४ आणि ९१६ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, २७१३.०८

दशांश अपूर्णाकांचा गुणाकार.

‡ जसे अपूर्णाक असतात. तसे कर्त्यासपांडून गुणाकार करावा, न
तर दोहों कर्त्यांत जितकीं दशांश स्थळे आहेत तितकीं गुणाकारांत पो
जून दशांश चिन्ह करावे. परंतु जर गुणाकारांत इतकीं अंकस्थळे नाहीं
तर मागे शून्ये देऊन तितकीं स्थळे पूर्ण करून दशांश चिन्ह करावे.

उदाहरणे.

प्रथम, ३२१०९६ यांस २४६५ यांनीं गुण.

३२१०९६

२४६५

७६०५४८०

१९२६५७६

१२८४३८४

६४२१९२

१०७९५०१६४० गुणाकार हें उत्तर.

दुसरें, ७९३२७ यांस २३१५ यांनीं गुण.

उत्तर, १८३६८८३०५.

तिसरें, ६३४७८ यांस ४२०४ यांनीं गुण.

उत्तर, २६६८१५१२.

चवथें, ३८५७४६ यांस ००४६४ यांनीं गुण.

उत्तर, ००१७८९८६१४४.

प्रथम संक्षेप.

दशांशास १ आणि त्यावर १, दोन, किंवा याहून अधिक शून्ये. ज
से १०, १००, १००० इत्यादिकांनीं गुणायास.

हें काम करायास इतकें मात्र केले पाहिजे, गुणकांत जितकीं शून्ये
आहेत तितक्यां स्थळांवर गुण्यांत उजवेकडे दशांश चिन्ह सारावे, तित
कीं स्थळे नाहीत तर शून्ये देऊन पूर्ण करावीं.

उदाहरणे.

प्रथम, ५१३ आणि १००० यांचा गुणाकार हाच आहे, ५१३००.

दुसरें, २७१४ आणि १०० यांचा गुणाकार काय आहे ?

तिसरें, ९१६ आणि १००० यांचा गुणाकार काय आहे ?

‡ या पुढील उदाहरणापासून यारीतीची सत्यता स्पष्ट होईल — १२ हें ३६१
यांनीं गुणायाचें असावे. यासंख्या याचे बरोबर आहेत. १३ आणि ३६१ यांचा गु
णाकार हाच आहे. ४३३३ म्हणजे पूर्वी सांगितले दशांश अपूर्णाक लिहिण्याचेरीती
प्रमाणें ००४३३२ आहे. ज्यांत दशांश स्थळे छेदस्थळांचे शून्या इतकीं आहेत अथवा
दोहों कर्त्यांत जितकीं दशांश स्थळे आहेत.

चवथें. २१'३१ आणि १०००० यांचा गुणाकार काय आहे

दुसरा संक्षेप.

संक्षेपानें गुणाकार कृति करायाचा. असा कीं. गुणाकारांत दशांशस्थळें इच्छित्या प्रमाणेंच येतील.

गुणक संख्येतील एकचे स्थळांचा अंक गुण्यांकाचे त्या अंकारवालीं लिहावा; जो अंक गुणाकारातील इच्छिते दशांशस्थळांचे शेवटले स्थळां आहे; आणि तेथून बाकी पूर्णोक्त उजवेकडे उलट लिहावे, आणि अ पूर्णोक्त त्या एकपासून उजवेकडे लिहावे. नंतर गुणायास आरंभ करावा, ज्या गुणकानें गुणायाचे त्याचे वरचे अंकापासून होईल असा; परंतु उजवेकडील शेवटा पासून लिहावे; मागील सोडिले अंकांतून एक जवळचा अंक गुणून त्यांतून हातचे घेण्याचा मार्ग ५ पासून १४ पर्यंत असल्यास हातचा एक धरावा; तसें १५ पासून २४ पर्यंत हातचे २, तसें २५ पासून ३४ पर्यंत असल्यास हातचे ३, याप्रमाणें पुढेंही. तो हातचा अंक त्यांत मिळवून लिहावे; नंतर पूर्वेप्रमाणें मिळवणी करून तिनकें इच्छिते स्थळांवर दशांश चिन्ह करावें, ह्याप्रजे गुणाकार झाला.

उदाहरणें.

प्रथम. २७'१४९८८६ यांस. ९२'४१०३५ यांनीं गुण, असें कीं. गुणाकारांत दशांशस्थळें चार होतील.

संक्षेपरीति.

२७१४९८८६
५३०१४२१
२४४३४८७४
५४२८९७
१०८५९९
२७१५
८१
१४
२५०८९२८०

चालतीरीति.

२७१४९८८६
९२'४१०३५
१३५३४९३०
८१४४९५८
२७१४९८८६०
१०८५९९४४
५४२८९७२
२४४३४८७४
२५०८९२८०
२५०८९२८०

दुसरें. ४८०'१४९३६ यांस २'७३४१६ यांनीं गुण, असें कीं, गुणाकारांत दशांशस्थळें चार होतील.

गुणाकार, १३०८'००३६.

तिसरें. २४९०'३०४८ यांस ५७३२८६ यांनीं गुण, असें कीं, गुणाकारांत दशांशस्थळें पांच होतील.

गुणाकार. १४२७'६५६९७.

चवथें, १२५० ७०१२ २८ यांस ७२१८ १९३ यांनी गूण, असे-
कीं, गुणाकारांत दशांशस्थळें तीन होतील. गुणाकार, २३५ १०२.

दशांशअपूर्णाकाचा भागाकार.

पूर्णाका प्रमाणें, भागाकार करावा; आणि भागाकारांत इतकीं दशांशस्थळें करावीं कीं, जितकीं, दशांशस्थळें भाजका पेक्षां भाज्यांत अधीक आहेत. †

दशांशचिन्ह बिंदुस्थळ जाणायाची दुसरी हीरी ती आहे; भागाकारांतलें प्रथम अंक, पूर्णाक अथवा दशांश असेल तो अशास्थळीं असावा कीं, भाजक आणि भागाकार यांचे प्रथमगुणाकारांतलें भाजकाचे एकं चे स्थळींचा गुणला अंक जशास्थळीचे भाज्यांकाराबरोबर सेल. तशास्थळीं.

जेव्हां हीरी प्रमाणें दशांशचिन्ह बिंदुस्थळ करायाचें आणि भागाकारांत, नेवटींस्थळें नाहींत तर प्रन्यानीं नेवटींस्थळें करून बिंदु करावा.

जेव्हां भागाकार केल्यानंतर काहीं शेष राहिल अथवा जेव्हां दशांशस्थळें भाज्या पेक्षां भाजकांत अधिक आहेत; तेव्हां भाज्यावर नितकीं प्रन्यें घालावीं कीं, काम इच्छे प्रमाणें होईल.

प्रथम,	उदाहरणें.	दुसरें,
१७८१ २८५२०९९८ (००२७२५८९	२६३९०	२७००००००९०२ ३११२
१२९२		६९००
२६०		८२२०
१०२९		३०३०
१५९९		३९१०
१७५८		१२७१०
१५६		२९५४

निसरें, १२३ ७०५३६ यांस ५४ २५ यांनी भाग.

चवथें, १२ यांस ७८५४ यांनी भाग.

पांचवें, २१९५ ६८ यांस १०० यांनी भाग.

उत्तर, २ २८०२

उत्तर, १५ २७८.

उत्तर, २१ ९५६८.

† यारीतीचें कारण स्पष्ट आहे; कांकीं, भाजक आणि भागाकार हे गुणून भाज्य उत्पन्न होतो. आणि गुणाकार प्रमाणें भाज्यांत दशांशस्थळें भाजक आणि भागाकार बरो होतील दशांशस्थळांचे बरोबर असलीं पाहिजेत. पाजकांशी भागाकारांत नितकीं दशांशस्थळें प्रमलीं पाहिजेत. जितकीं भाजका पेक्षां भाज्यांत अधिक आहेत.

साहाय्य, ८२९७५९२ यांस. १५३ यांनी भाग.

उत्तर, ५४२३२

प्रथमसंक्षेप.

जे व्हां भाजक पूर्णांक आहे, आणि त्यावर कांहीं शून्ये असतील, तेव्हां त्या शून्यास काढून टाकावे, आणि दशांश चिन्ह भाज्यांत इतके स्थळांवर मागे जावेकडे सारावे, कीं, जितकीं शून्ये काढून टाकिलीं आहेत. जर भाज्यांत तितकीं स्थळे नाहीत तर जावेकडे शून्ये घालून पूर्ण करून, सारावे नंतर वर सांगितले रीतीने भागाकार करावा.

उदाहरणे.

प्रथम, २५५ यांस २१०० यांनी भाग.

२१० २५५ ०२१६ इत्यादि.

३५

१२०

दुसरे, २१०२० यांस ३२००० यांनी भाग.

तिसरे, ९५३ यांस २१६०० यांनी भाग.

उत्तर, १२८१८७५.

उत्तर, ०४२१२०३७०३७ इत्यादि.

चवथे, ६१ यांस ७९००० यांनी भाग.

उत्तर, ०००७७२१५१९ इत्यादि.

दुसरा संक्षेप.

वरचे संक्षेपापासून हे सिद्ध होतं कीं, जर भाजक १ हा अंक असेल, आणि त्याजवर कांहीं शून्ये असतील, जसे, १०, १००, १००० इत्यादि, तर भागाकार काढाया साठी भाज्यांतील दशांश चिन्ह इतके मात्र मागे सारिले पाहिजे कीं, जितकीं भाजकांत शून्ये आहेत; जर इतकीं अंक स्थळे नसतील तर मागे शून्ये घालून स्थळे पूर्ण करून सारावे.

उदाहरणे.

जसे, २१०२ ÷ १०० = २.१०२

आणि, ५१६ ÷ १०० = ५.१६

आणि, २१९ ÷ १० = २१.९

आणि, २१ ÷ १००० = .

तिसरा संक्षेप.

जेव्हां भाजकांत अंक बहुत आहेत; अथवा भागाकारांत दशांश

स्थळें इच्छे प्रमाणें चयावीं असें आहे; तेव्हां भागाकारांत पूर्णांक स्थळें किती येतील तो सुमार करून तीं व इच्छिलेलीं दशांश स्थळें मिळून किती स्थळें होतात तिनकीं भाजक स्थळें ठेवून बाकी कापून राखावीं. नंतर तो भाजक भाज्याचे प्रथम अंकांत किती वेळ जाईल तें पूर्वप्रमाणें पाहावें.

नंतर अनुक्रमे प्रत्येक वजाबाकी नवे भाज्य असावे; आणि असा प्रत्येक भाज्य घेतल्यावर भाजक स्थळांचा एक एक उजवेकडील अंक सोडावा, परंतु स्मरण ठेवावें कीं, असा एकेक अंक सोडिल्यावर हातचा अंक गुणाकाराचे दुसरे संक्षेपांत सांगितल्या प्रमाणें घेतला पाहिजे; पाहा जेव्हां भाजकांत इतके अंक नाहीत, जितके भागाकारांत इच्छिले आहेत, तेव्हां सर्व अंकांनीं भागाकार छत्य आरंभ करावें, आणि सरळरीतीनें भागाकार चालवावा, जोपर्यंत भाजक स्थळां इतके अंक माघ राहातील, जितके भागाकारांत बाकी काढणें राहिले; नंतर आरंभ करावा.

उदाहरणें.

प्रथम, २५०८९२८०६ यांस १२४१०३५ यांनीं भाग, असें कीं, भागाकारांत दशांश स्थळें चार होतील. यावरून या उदाहरणीं भागाकारांत अंक स्थळें साहा होतील.

संक्षेपरीति.

१२४१०३५) २५०८९२८०६ (२७१४९८
 ६६०७३५
 १३८४९०
 ४६०८
 ११२
 ८०
 ६

चालतीरीति.

१२४१०३५) २५०८९२८०६ (२७१४९८
 ६६०७३५०६
 १३८४९०६०
 ४६०७५७५०
 ११११६१००
 ७९४६७८५०
 ५५३६५७०

दुसरें, ४१०९२३५१ यांस २३०४०९ यांनीं भाग, असें कीं भागाकारांत दशांश स्थळें चार होतील.

उत्तर, १७८३४५.

निसरे, १७ १० २८ यांस ५७ १३ ९६ यांनी भाग, असे कीं, भागाकारान दशांशस्थळें पांच होतील.

उत्तर, ०० ६ २९.

चवथें, ९१ ३ ०० यांस २१ ३७ २ यांनी भाग, असे कीं, भागाकारान दशांशस्थळें तीन होतील.

उत्तर, ४२७.

दशांशरूपभेद प्रथमप्रकार.

व्यवहारी अपूर्णाकांस बरोबर भावाचें दशांशरूप द्यावयाचा.

दशांश भागाकारातीप्रमाणें अंश छेदानी भागावे अंशावर हावीं तेवढीं शून्ये द्यावीं; भागाकार येईल ते इच्छिते दशांश झाले.

※ ज्यांचे छेद अविभाज्य संख्या आहे अशे व्यवहारी अपूर्णाकांस दशांशरूप द्यावयास इच्छिते आहे. असे कीं, ज्याचे अंक बहुत होतील, त्याची रीति ही आहे.

उदाहरणें.

हे हा व्यवहारी अपूर्णाक असावा, ज्यास बरोबर भावाचें दशांशरूप देणें आहे.

ते व्हा-आठवें शतीनें शेष एकच अंकरा ही पर्यंत भागाकार करून त्याचें हें रूप होईल $\frac{१}{२} = ०३२२८६$, हा संपूर्ण भागाकार आहे, नंतर यास समीकरणाच्या दोन्ही बाजू ८ या शेषाचे अंशानी गुणून यास हें रूप होईल $\frac{८}{२} = २७५८२६$ अथवा $\frac{८}{२} = २७५८६$; जर ही किंमत प्रथम समीकरणाने व्यवहारी अपूर्णाकाचे स्थळी लिहिती तर त्यास हें रूप होईल, $\frac{८}{२} = ०३२२८२७५८६$, पुनः यास समीकरणाच्या दोन्ही बाजू ६ या शेषाचे अंशानी गुणित्यातर यांस हें रूप होईल.

$\frac{८}{२} = २७५८६५५५७$; तर पूर्वप्रमाणें ही किंमत त्या समीकरणाचे व्यवहारी अपूर्णाक स्थळी लिहिती तर त्यास हें रूप होईल, $\frac{८}{२} = ०३२२८२७५८६५५५७$; याप्रमाणें पुढेही इच्छा असेल तेथ पर्यंत करावें; म्हणजे या पासून कळतें कीं, प्रति आवृत्तीस दशांशस्थळें दुप्पर वाढतात या उदाहरणां न दशांश अष्टावीस अंकस्थळानी पुनरावृत्त होतात, म्हणजे सांगितलें अपूर्णाकाचे छेदस्थळाचे एकोन संख्या इतक्या स्थळानीं यांस बरोबर दोन अवयवांनी भागितां येईल, पुढे सांगतो याप्रमाणें.

०३२२८२७५८६२०६८

०६५५५७२७१३७९३१

यांत पाहून कळेल कीं, या दोन ओळींतील अनुक्रमें एक एक अंक अशा दोन अंकांची बेरीज ९ या अंका बरोबर आहे; जसें, ० + ९ = ९; ३ + ६ = ९; असे पुढेही या अष्टावीस अंकस्थळांचे आवृत्तीत $\frac{८}{२}$ आणि $\frac{८}{२}$ इत्यादि, सर्वांचे वगळाले भाव निघतात. परंतु त्याचा कोण कोणतें अंकापासून आरंभ होतो हें अन्यान्य कळेल, जसें $\frac{८}{२} = ०६८९६$ इत्यादि. म्हणजे या मूळ आवृत्तीचें बारावें

प्रथम, १ यांस दशांशरूपदे.

२४ = ४ + ६ नेव्हां ४१ ७

६१ १७५००००

२९९६६६ इत्यादि.

दुसरें, १/२ आणि १/३ आणि १/६ यांस वेगळाले दशांशरूपदे.

उत्तर, २५ आणि ५ आणि ७५.

तिसरें, १/४ यांस दशांशरूपदे.

उत्तर, ६२५.

चवथें, १/५ यांस दशांशरूपदे.

उत्तर, १२.

पांचवें, १/६ यांस दशांशरूपदे.

उत्तर, ०३१२५

साहायें, १/१२ यांस दशांशरूपदे.

उत्तर, १४३१५४, इत्यादि.

दुसऱ्या प्रकार

कोणतेही दशांशाचा भाव त्याचे रवालचे.

हलके नांवात काढायाचा.

शेति.

सांगितले दशांश ज्या भाशी नांवाचे अंकाचे असतील त्याचे रवालचे हलके नांवाचे त्या भाशी नांवाचे एकांत किती आहेत तितक्यांनी ते दशांश गुणून गुणाकारांत दशांश चिन्ह द्यावें,

नंतर जे दशांश राहिले त्यांस त्याचे रवालचे हलके नांवाचे या भाशी नांवाचे एकांत किती आहेत तितक्यांनी ते दशांश गुणून गुणाकारांत दशांश चिन्ह द्यावें. याप्रमाणें शेवट पर्यंत करावें.

शेवटीं हे सर्व उवेकडील पूर्णांक त्या पहिले भाशी नांवाचे अंका

अंकस्थळापासून आरंभ होतो १ = १०३२८ इत्यादि म्हणजे इचे अठराविसावें अंकस्थळापासून आरंभ होतो. म्हणून या मूळ अठराविसा अंकस्थळांचे आवृत्तीचे पोटाने दुसऱ्या अठराविसा आवृत्ति अंकस्थळांच्या अठराविसा आवृत्ती होतात.

ज्यांचे छेद अविभाज्य सरव्या आहेत असे व्यवहारी

अपूर्णाकांत या सारिरेवच काही चमत्कारीक गुण आहेत

ते सम जात घावपाकरिता बाजूवर दुसरें उदाहरण दारव

वितां, ज्यांचे छेदस्थळां ७ ही अविभाज्य सरव्या आहेत,

तथापि साहासाहा अंकस्थळांच्या साहा आवृत्ति साहा

अंकस्थळांचे मूळ आवृत्तीत आहेत.

१ = १०३२८५७१२, इत्यादि.

२ = २०५७१२८

३ = ३२८५७१२

४ = ४७१२८५७

५ = ७१२८५७१

६ = ८५७१२८५

हून उतरते आहेत ते जुळून लिहावे म्हणजे बरोबर किंमत झाली.
दीप. हीरीनि पूर्णोकांचे उतरती भांजणी सारखी आहे.

उदाहरणे.

प्रथम; ७७५. रूपयांचे यांची किंमत काय आहे.

रु. ७७५
४

पा. ३९००
१००

रु. १० ०००

उत्तर, पा. रु.
३ १०

दुसरे; ६२५ शिलिंगांचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर, ७ ३ पेन्स.

तिसरे; ८६३५ पोंडाचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर, शि. १३ ३ २४ पेन्स.

चवथे; ०१२५ मणांचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर, २ ४ पावशेर.

पाचवे; ४ ६९४ पोंड त्रायचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर ओ. पे. ये. १३ १२ १५ १४४.

साहावे; ६२५ रंबडीचे यांचा भाव काय आहे.

म. पा.
उत्तर, १२ ६.

सानवे; ००९९४३ मेलनि यांचा भाव काय आहे.

पाडे. फू. रु.
उत्तर, १७ १ ५ ९८८४८.

आठवे; ६८७५ यार्डेवस्त्राचे यांचा भाव काय आहे.

पा. रु.
उत्तर, २ ३.

नववे; ३३७५ विघ्यांचे यांचा भाव काय आहे.

पा. का.
उत्तर, ६ १५.

दाहावे; २५८३ हागझेटचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर, १३ १२३९ ग्यालन.

निसराप्रकार.

हलके नांवाचे पूर्णोक्त अथवा दशांश यांस बरोबर भावाचे, भा
री नांवाचे दशांशाचे रूप द्यावयाचा.

रीति.

जो अंक सांगितला आहे तो त्याचे वरचे भारी नांवाचे अंकांत ते किती आहेत नितक्यानीं भागावा. भागाकार येईल तो दशांश रूप होईल. या प्रमाणें इच्छिते भारी नांवां पर्यंत करावें.

उदाहरणें.

प्रथम, १ शेर वजनी यांस रवंडीचे दशांशांचें रूपदे.

४० १ शेर
०२५ मणाचे

२० ००१२५ रवंडीचे हें उत्तर,

दुसरें, ९ रेसांस रुपयाचे दशांशांचें रूपदे.

तिसरें, केली २ अधोलींम रवंडीचे दशांशांचें रूपदे.

चवथें, २६ रेसांचे यांस रुपयाचे दशांशांचें रूपदे.

पांचवें, २१५ पौंड यांस हंड्रेड वेदान्ते दशांशांचें रूपदे.

उत्तर, ०१९१९६. इत्यादि, हंड्रेड वेद.

साहावें, २० यार्ड यांस मैलाचे दशांशांचें रूपदे.

उत्तर, ०१३६३६. इत्यादि, मैल.

सातवें, १ काठी ईस बिघ्याचे दशांशांचें रूपदे.

आठवें, २ फरे मीठ यांस राशीचे दशांशांचें रूपदे.

नववें, १४ मित्युटे यांस दिवसाचे दशांशांचें रूपदे.

उत्तर, ००९७२२ इत्यादि, दिवस.

दाहावें, २१ केली शेराचे यांस रवंडीचे दशांशांचें रूपदे.

अकरावें, २० सेकंद यांस मित्युटाचे दशांशांचें रूपदे.

पाहा, जेव्हां हलके नांवाचे अंकाच्या अनेक रकमा आहेत त्यां-
म भारी नांवाचे दशांशांचें रूपदेणें तेव्हां.

भाज्यां करितां सांगितल्या रकमा एक एका रवालीं लिहाव्या, अशा कीं, त्यांनील हलके नांवाची रकम वर येऊन अनुक्रमें उत्तरोत्तर भारी नांवाच्या रवालीं येतील.

प्रत्येक भाज्याचे डावेकडे भाजकाकरितां ते अंक लिहावे कीं, ज्या अंकांनीं त्या रकमा भारी नांवांत आणितां येतील; आणि; भाज्य भाजक यांची भिन्नता दाखवाया साठीं मध्ये रेष उभी करावी.

वरचे ओळी पासून आरंभ करून अनुक्रमें सर्व भागाकार करावा,

आणि जो भागाकार येईल तो प्रत्येक त्याचे त्याचे खालचे ओळींतील भा-
ज्याचे उजवेकडे दशांश चिन्ह करून पुढें मांडावा; असें करितां करितां जो
शेवटील भागाकार येईल ते इच्छितें दशांशरूप होईल.

उदाहरणें.

प्रथम, ३ पावले ४० रेस यांस रुपयाचे दशांशांचें रूपदे.

१०० ४०

४ ३४

८५ रुपयाचे हें उत्तर.

दुसरे, १९ रुपये ३ पावले पन्नास रेस यांस रुपयाचे दशांशांचें रूपदे.

तिसरे, ३ पावले ८ रेस यांस रुपयाचे दशांशांचें रूपदे.

चवथें, १ पावला ५ रेस यांस रुपयाचे दशांशांचें रूपदे.

पांचवें, ५ मण ३० शेर वजनी यांस खंडीचे दशांशांचें रूपदे.

दशांशांचें त्रैराशिक.

सर्वपदे या रीतीनें तयार करावीं, ह्मणजे व्यवहारी अपूर्णाकांस द-
शांश रूप द्यावें, अनेकरकमांचे पदांस भारी नांवाचे दशांशांचें रूप द्यावें
अथवा हलके नांवाचे पूर्णाकांचें रूप द्यावें, आणि आद्यंत पदे समजाती
असावीं. नंतर पूर्णाकांत सांगितल्या प्रमाणें त्रैराशिक करावें.

पाहा, पूर्णाकांत आणि व्यवहारी अपूर्णाकांत जीं वेगळालीं त्रैरा-
शिक आणि पंचराशिकादिक यांचीं उदाहरणें सांगितलीं आहेत तीं इथे
प्रमाणें या दशांश त्रैराशिकानें होतील, आतां याची रीति दारववायासा-
ठीं व्यवहारी अपूर्णाक त्रैराशिकांतील प्रथमोदाहरण एथें घेतां.

जर एक यार्ड बनानीचे ३ यांस एकरुपयाचे ३ पडतात, तर एक
यार्ड बनानीचे ३ यांस काय पडेल ?

$$\frac{३}{१} = \frac{३०५}{३०५} \cdot \frac{३०५}{३०५} \cdot \frac{३०५}{३०५} \cdot \frac{३०५}{३०५} \cdot \frac{३०५}{३०५} \cdot \frac{३०५}{३०५} \cdot \frac{३०५}{३०५} \cdot \frac{३०५}{३०५} \cdot \frac{३०५}{३०५} \cdot \frac{३०५}{३०५}$$

३०५) १२५००० ३३३३३३ इत्यादि.

$$\frac{३}{१} = ४$$

$$\begin{array}{r} १२५० \\ ३३३३३३ \\ \hline १०० \end{array}$$

$$\frac{३}{१} = ३९२५$$

$$\frac{३३३३३३३३३३}{३३३३३३३३३३}$$

उत्तर, पा. रे.

१०० ३३ ३३ ३३ इत्यादि.

द्वादशांश.

द्वादशांश ह्यणून एकरीति आहे, जीणेकरून शिल्लिलोक आपाप ले कामाचीं क्षेत्र फळें जाणतात फूर, इंच आणि पावइंच हींचमानें प्राय शः कामांत घेतात याहून सूक्ष्म आहेत तीं घेतनाहींत. याकामाचीरीति पुढें सांगतों.

जीं मापें परस्पर गुणायाचीं आहेत तीं एकारवालीं एकलिहावीं, अशीं कीं, फुरी रवालीं फूर, इंचा रवालीं इंच, आणि पावइंचारवालीं पावइंच येईल.

गुण्यांतील हलके नामाचे पदपासून आरंभकरून त्याचें प्रत्येक पद गुणकचे फुरस्थळींचे अंकानें गुणावें, आणि प्रत्येकपदाचा गुणाकार त्याचेत्याचे रवालीं लिहावा, परंतु इंचस्थळींचा गुणाकार बारा पेक्षां अधिक आल्यास बारांनी भागून बाकी तेथें लिहावी, आणि भागाकार हातचा अंक तो फुरस्थळींचा गुण्य गुणून त्यांत मिळवून लिहावा.

अशारीतिनें, गुण्याचीं वेगळालीं पदे गुणांकचे इंचस्थळींचे अंकाने आणि त्यावरील भागानें ही गुणून गुणाकार बारा पेक्षां अधिक आल्यास पूर्वप्रमाणें करून उजवेकडेस एकस्थळ सारून गुणाकार मांडावा.

नंतर विविध भिन्नवणी प्रमाणें त्या दोन ओळींची बेरीज घ्यावी.

उदाहरणें.

प्रथम, ४ फूर ७ इंच हे गुण्याक ६ फूर ४ इंच या गुणकांकानें गुणून गुणाकार काय आला तो सांग.

फु.	इं.
४ . . . ७	
६ . . . ४	
<hr/>	
२७ . . . ६	
१ . . . ६	
<hr/>	
२८ . . . ०	६

हें उत्तर,

दुसरें, १४ फूर ९ इंच हें गुण्याक ४ फूर ६ इंच या गुणकांका नें गुणून गुणाकार काय आला तो सांग.

फु.	इं.
१४ . . . ९	
४ . . . ६	
<hr/>	
५८ . . . ५	
३ . . . ५	
<hr/>	
६१ . . . ५	

हें उत्तर,

निसरें, ४ फूट ७ इंच हे गुण्यांक ९ फूट ६ इंच या गुणकांकानें गुणून गुणाकार काय आला तो सांग.

उत्तर, फु. इ.
२३ ६ ३

चवथें, १२ फूट ५ इंच हे गुण्यांक ६ फूट ८ इंच या गुणकांकानें गुणून गुणाकार काय तो सांग.

उत्तर, फु. इ.
८२ ९ ३

पांचवें, ३५ फूट ४ १/२ इंच हे गुण्यांक १२ फूट ३ इंच या गुणकांकानें गुणून गुणाकार काय तो सांग.

उत्तर, फु. इ.
४३३ ४ ३

साहाबें, ६४ फूट ६ इंच हे गुण्यांक ८ फूट ९ १/२ इंच या गुणकांकानें गुणून गुणाकार काय तो सांग.

उत्तर, फु. इ.
५६५ ८ ३

पाहा. वरचे गुणाकारांत इंचस्थळीं ज्या संख्या आहेत त्या तितके चौरस इंच दारववीत नाहीं, परंतु काटकोन चौकोन दारववितात, ज्याची रुंदी १ इंच, आणि लांबी बारा इंच. जसें प्रथम उदाहरणाचें उत्तर २९ चौरस फूट आणि ४ चौरस इंच आहे. आणि दुसरे उदाहरणाचें उत्तर ६६ चौरस फूट आणि ५४ चौरस इंच आहे.

घातकर्म.

घात ह्मणजे कोणी एक संख्या मूळ कल्पून तिणें तीच पुनः पुनः विवक्षीत वेळा गुणून जो अवयवी उत्पन्न होतो तो आहे. हा घात उत्पन्न करण्याचे रीतीस घातकर्म ह्मणतात. जसें,

२ = २ हें मूळ, अथवा २ याचा प्रथम घात आहे.

२ + २ = ४ हा दोन याचा द्विघात, अथवा वर्ग आहे.

२ + २ + २ = ८ हा दोन याचा त्रिघात, अथवा घन आहे.

२ + २ + २ + २ = १६ हा दोन याचा चतुर्घात आहे.

आणि या रीतीनें करून पुढील कोष्टकांत प्रथम नवसंख्यांचे प्रथम नवघात सांगतो.

घातकोष्टक.

प्रथम नवसंख्यांचे.

प्र.	वर्ग	घन	चतुर्थी	पंचम्या	षड्घात	सप्तम्यात	अष्टघात	नवघात
१	१	१	१	१	१	१	१	१
२	४	८	१६	३२	६४	१२८	२५६	५१२
३	९	२७	८१	२४३	७२९	२१८७	६५६१	१९६८३
४	१६	६४	२५६	१०२४	४०९६	१६३८४	६५५३६	२६२१४४
५	२५	१२५	६२५	३१२५	१५६२५	७८१२५	३९०६२५	१९५३१२५
६	३६	२१६	१२९६	७७७६	४६६५६	२७९९३६	१६७९६१६	१००७७६९६
७	४९	३४३	२७०१	१६८०७	११७६४७	८२३५४३	५७६४८०१	४०३५३६०७
८	६४	५१२	४०९६	३२७६८	२६२१४४	२०९७१५२	१६७७७२१६	१३४२१७७२८
९	८१	७२९	६५६१	५९०४९	५३३४७१	४८२१६९	४०७६७२९	३८७४२०४८९

घातप्रकाशक ती संख्या आहे, जी त्या घाताचे स्वरूप दाखविते, आणि घात उत्पन्न करण्यास जितके वेळ गुणाकार करावे लागतान त्या वेळा पेक्षां एकानें अधीक असते. जसें, १ हा मूळाचा प्रकाशक आहे. २ हा द्विघात अथवा वर्ग याचा प्रकाशक आहे. ३ हा त्रिघात अथवा घन याचा प्रकाशक आहे. ४ हा चतुर्घाताचा प्रकाशक आहे. असें सुद्धे ही

जेव्हां घात उत्पन्न करायाचे आहेत. तेव्हां अशी रीति आहे की, मूळ संख्येचेवर उजवे भागास त्यांचे प्रकाशक बारीक लिहावे.

जसें. ३ = ४ हा २ याचा द्विघात अथवा वर्ग दाखवितो.

३ = ८ हा २ याचा त्रिघात अथवा घन दाखवितो.

३ = १६ हा २ याचा चतुर्घात दाखवितो.

५४० = ८५०३०५६०००० हा ५४० याचा चतुर्घात दाखवि.

जेव्हां दोन किंवा अधिक घात परस्पर गुणिले आहेत तेव्हां त्यांचा गुणाकार तो घात आहे. ज्याचा प्रकाशक दोन कर्त्यांचे घातप्रकाशकांचे बेरीजे बरोबर आहे. अथवा घातांचा गुणाकार आणि त्या वेगळ्या कर्त्यांचे प्रकाशकांची बेरीज एकच आहे. जसे पुढील दोन याचे सांगितले घातांमसून कुंठे

प्र.	द्वि.	तृ.	च.	पंच.	ष.	स.	अ.	न.	द.
२	४	८	१६	३२	६४	१२८	२५६	५१२	१०२४
अथवा, १	२	३	४	५	६	७	८	९	१०

यांत $४+४=१६$ आणि $२+२=४$ हा त्याचा प्रकाशक आहे.
 आणि $८+१६=२४$ आणि $३+४=७$ हा त्याचा प्रकाशक आहे.
 आणि $१६+६४=८०$ आणि $४+६=१०$ हा त्याचा प्रकाशक आहे.

पुनः $\frac{३}{२} + \frac{३}{२} = \frac{६}{२}$ हा $\frac{३}{२}$ चा वर्ग आहे; $\frac{६}{२} + \frac{३}{२} = \frac{९}{२}$ हा $\frac{३}{२}$ चा घन आहे; आणि $\frac{९}{२} + \frac{३}{२} = \frac{१२}{२}$ हा $\frac{३}{२}$ चा चतुर्घात आहे, असे पुढेही. या पासून कळते की, पूर्णांकांचे घात उत्तरोत्तर अधिक भावाचे होतात; आणि व्यवहारी सम अपूर्णांकांचे घात उत्तरोत्तर न्यून भावाचे होतात.

दुसरी उदाहरणे.

पहिलें, ४५ यांचा द्विघात अथवा वर्ग काय होतो तो सांग.

उत्तर, २०२५.

दुसरें, ४१६ यांचा वर्ग काय होतो तो सांग.

उत्तर, १७३०५६.

तिसरें, १५ यांचा त्रिघात किंवा घन काय होतो तो सांग.

उत्तर, ४२०७५.

चवथें, ०२९ यांचा पंचघात काय होतो तो सांग.

उत्तर, ०००००००२०५११४०.

पांचवें, $\frac{३}{२}$ यांचा वर्ग काय होतो तो सांग.

उत्तर, $\frac{९}{४}$.

साहाबें, $\frac{२}{३}$ यांचा त्रिघात काय होतो तो सांग.

उत्तर, $\frac{१२५}{७२९}$.

सातवें, $\frac{३}{४}$ यांचा चतुर्घात काय होतो तो सांग.

उत्तर, $\frac{९}{२५६}$.

मूळकर्म.

मूळकर्म म्हणजे कोणतेही सांगितले घाताचे मूळ काढायची शक्ति, त घात कर्माचे उलटें आहे.

कोणतीही संख्या अथवा घात याचें मूळ, तीच संख्या आहे, जी तीणें तीच कितीवेळ गुणून तोच घात उत्पन्न करिते. जसें, २ हे ४ यांचें वर्गमूळ आहे, कांकीं, $२ = २ + २ = ४$; आणि ३ हे २७ यांचें घनमूळ आहे, कांकीं $३ = ३ + ३ + ३ = २७$.

कोणतीही संख्या अथवा मूळ विवक्षित वेळा त्याणें तेंच गुणून त्याचा घात पूर्ण करितां येतो. परंतु बहुतेकीं संख्या अशा आहेत कीं, ज्यांचें मूळ कधींही पूर्ण निघत नाही. तथापि दशांशांचे सहाय्यानें मूळाचे जवळ जवळ जावतें.

जें मूळ पूर्ण निघत नाही त्यास रवंडमूळ अथवा करणी म्हणतात; आणि जीं मुळें बरोबर काढवतात त्यांस अरवंडमूळें म्हणतात; जसें, ४ यांचें वर्गमूळ करणी आहे; परंतु ५ यांचें वर्गमूळ अरवंड आहे, कांकीं, पूर्ण २ आहेत; पुनः ८ यांचें घनमूळ अरवंड आहे, कांकीं, पूर्ण २ आहेत; परंतु ९ यांचें घनमूळ करणी अथवा रवंड आहे.

मूळ दारववायाकरितां घाताचे मागे क्वचित् $\sqrt{\quad}$ असें चिन्ह करितात, आणि त्या चिन्हांत मूळ प्रकाशक लिहितात. जसें, २० यांचें घनमूळ $\sqrt[3]{20}$ असें लिहितात; आणि त्यांचें वर्गमूळ $\sqrt{20}$ असें लिहितात. असें वर्गमूळ दारववायासाठीं त्याचा प्रकाशक २ हा कधींही त्यांत लिहीत नाहीत केवळ चिन्हांनेच दारववितात.

जेव्हां घातांत अनेकपदे + घन - ऋण चिन्हांनी जोडिलेली आहेत तेव्हां त्याचे श्वेकडील मूळ प्रकाशक चिन्हाचे शिरापासून त्यांजवर-अशी सरळ रेषा करितात. जसें, $४५ - १२$ यांचें घनमूळ $\sqrt[3]{४५-१२}$ असें लिहितात. अथवा त्या संख्यांस कोसांचे सारखेंत बांधून या रीतीनें लिहितात, जसें, $\sqrt[3]{४५-१२}$.

परंतु आतां प्रायशः सर्व मूळांचे प्रकाशक, व्यवहारी अपूर्णाकांचे रूपानें घात प्रकाशकां सारखें लिहितात; जसें, ८ यांचें वर्गमूळ $८^{\frac{१}{२}}$ असें, २५ यांचें घनमूळ $२५^{\frac{१}{३}}$ असें, आणि $४५ - १८$ यांचें चतुर्घात मूळ $(४५ - १८)^{\frac{१}{४}}$ असें. अथवा $४५ - १८^{\frac{१}{४}}$ असें.

वर्गमूळकाढायाचें.

* सांगितले संरच्येस दोन दोन अंकस्थळांचे भागांनीं याशीतीनें भागा
वी, संरच्येतील एकमस्थळांचे अंकावर बिंदु करावा, नंतर शतमस्थ-
ळांचे अंकावर दुसरा बिंदु करावा, याप्रमाणे पुढेही, म्हणजे केले बिंदू
पासून एकस्थळ सोडून दुसऱ्यावर करावा, याप्रमाणे पूर्णांकांत एक
मचे स्थळांपासून डावेकडे बिंदु करीत चालावे. आणि दशांत उजवेकडे
डावेकडील शेवटचे प्रथमभागांत अतिमोठावर्ग काय आहे ते शो-
धावे, आणि त्याचे मूळ उजवेकडे जेथे भागाकार लिहितात तेथेमांडावे.
नंतर शोधून काढलेला अतिमोठा वर्ग त्या प्रथम भागांतून वजा
करावा, आणि बाकी राहील तीचे उजवेकडे वरचा दुसरा भाग भाज्या
करिता घ्यावा.

भाजका करितां वर लिहिलेलें मूळ दुप्पट करून लिहावा, आणि
भाज्याचे उजवे शेवटचा एक अंक सोडून राहिले भाज्यांत हा भाजक-

* सांगितले संरच्येचे दोन दोन अंकस्थळांचे भाग केले त्याचे कारण हें आहे
कीं, केवळ एक अंकाचे वर्गास दोहोंपेक्षा अधिक अंकस्थळे होत नाहीत; आणि
दोन अंकस्थळांचे संरच्येचे वर्गास चोहोंपेक्षा अधिक अंकस्थळे होत नाहीत;
याप्रमाणे पुढेही. याजकरितां मूळांत इनकीं अंकस्थळे होतील कीं, सांगि-
तले संरच्येचे जितके भाग झाले आहेत.

आणि या कर्मांतील वेगळाले मूमाकांचे कारण बीज गणितांतील वर्गांचे
रूपांपासून कळेल त्या वर्गांत परे दोन. अथवा तीन किंवा याहून अधिक असतील,
जसें, $(अ+ब)^३ = अ^३ + ३अब + ब^३ = अ^३ + (३अ+ब)ब$, हा वर्ग आहे दोन प-
दांचा. ज्यांत दिसते कीं, मूळाचे प्रथमपद अ आहे, आणि दुसरे ब, आणि प्रथमभाज-
क अ आहे, आणि नवा भाजक ३अ+ब आहे, म्हणजे मूळांतील प्रथम पदाची
दुप्पट दुसरे जवळचे पदानें वाढविलेली. याजकरितां मूळ काढण्याची रीति या प्र-
माणे आहे.

प्रथम भाजक अ $३अ + ३अब + ब^३ = ३अ + ब$ हें मूळ.

$$\begin{array}{r} \text{अ३} \\ \hline \text{दुसरा भाजक } ३अ + ब \quad \left| \begin{array}{l} ३अब + ब^३ \\ ३अब + ब^३ \end{array} \right. \end{array}$$

उजवेकडील मूळ, त्यांत अ, ब, क, तीन परे आहेत. जसें,

$(अ+ब+क)^३ = अ^३ + ३अब + ब^३ + ३अक + ३बक + क^३ = अ^३ + (३अ+ब)ब + (३अ+३ब+क)क$, हा तीन पदांचा वर्ग आहे, ज्यांत त्याचे मूळाचे प्रथम
पद अ, दुसरे पद ब, आणि तिसरे पद क आहे; आणि प्रथम भाजक अ आहे, दुसरा भाजक ३अ+ब,
तिसरा भाजक ३अ+३ब+क. यांत याहून स्पष्ट कळेल कीं, प्रत्येक भाजक, मूळांतील पूर्वीची
दुप्पट जवळचे नवे पदानें वाढविली याचे बरोबर आहे. आणि मूळ काढण्याची वर सांगि-
तले रीतीचे बरोबर आहे. या रीतिविषयी बीजांत मूळकर्मांचे दुसरे प्रकारांत लिहिले आहेत ते पाह.

किता वेळा जातो ते शोधवे; आणि तो वेळांक, भाजक आणि भागाकार यांचे उजवेकडे दोन स्थळीं लिहावा.

या वाटविले सर्वभाजकास त्या शेवटील वेळांकाने गुणावा, आणि तो गुणाकार भाज्यातून वजा करावा. नंतर जो बाकी राहिल तीचे जवळ वरचा पूर्वी घेतल्याचे जवळचा एक भाग नवे भाज्या करितां लिहावा.

नंतर मूळस्थळांचे सर्व अंक नवे भाजकाकरितां दुप्पट करून पूर्वप्रमाणें करावे. जो पर्यंत सांगितले संख्येचे सर्व भाग अनुक्रमें रवालीं आणून काम पुरें होईल.

पाहा. नवे नवे भाजका करितां मूळ दुप्पट करण्याची ही रीति सर्वां हून सोपी आहे कीं, मूळाचे शेवटचा वेळांक पूर्व भाजकांत भिळवावा हें या पुढील उदाहरणावरून स्पष्ट समजेल - आणि सांगितले संख्येतील सर्वभाग रवालीं आणून कामकेल्यावर कांहीं बाकी राहून काम वाटवायाची इच्छा असल्यास अति बाकीवर दोन दोन शून्यें देऊन दशांशांत वाटवितां येतील.

उदाहरणें.

प्रथम, २९५०६६२४ याचें वर्गमूळ काढ.

२९५०६६२४ (५४३२ हें, वर्गमूळ.

२५	
१०४	४५०
४	४१६
१०८२	३४६६
२	३२४९
१०८६२	२९७२४
२	२९७२४

पाहा. जेव्हां जें मूळ काढायचें आहे त्यांत अंकस्थळें बहुत पाहिजेत, तेव्हां घाशीत पासून कर्म फार संक्षेपानें होईल.

वर सांगितलें मूळ काढण्याचे रीति करून कर्म करीत चालावें, जो पर्यंत मूळाचे इच्छिते अंकस्थळांचे अर्धी किंवा एकाधिक अर्धी अंकस्थळें उत्पन्न होतील; नंतर राहिलीं अंकस्थळें उत्पन्न कराया-

सागं शेवरील भाज्य त्याचे भाजकानें दशांश संक्षेपरीतीनें भागावा;
जसें;

दुसरें, २ याचें वर्गमूळ नव अंकस्थळें पर्यंत काढावें.

२८१४१४२१३५६

१	
२४	१००
४	९६
२८१	४००
१	२८१
२८२४	११९००
४	११२९६
२८२८२	६०४००
२	५६५६४
२८२८४१	३८३६१३५६
	१०००
	१६०
	१९
	२

तिसरें, २०२५ याचें वर्गमूळ काय. ?

उत्तर, ४५.

चवथें, १७१०५९ याचें वर्गमूळ काय. ?

उत्तर, ४१९६

पांचवें, ०००७२९ याचें वर्गमूळ काय. ?

उत्तर, ०२७.

साहाबें, ३ याचें वर्गमूळ काय ?

उत्तर, १७३२०५०

सातवें, ५ याचें वर्गमूळ काय ?

उत्तर, २२३६०६८

आठवें, ६ याचें वर्गमूळ काय ?

उत्तर, २४४९४८९.

नववें, ७ याचें वर्गमूळ काय. १

उत्तर, २६४५७५१.

दाहावें, १० याचें वर्गमूळ काय १

उत्तर, ११६२२७७.

अकरावें, ११ याचें वर्गमूळ काय १

उत्तर, ११६६२४.

बारावें, १२ याचें वर्गमूळ काय. १

उत्तर, ११४४११०१.

व्यवहारी अपूर्णांक आणि भागानुबंध पूर्णकां यांची वर्गमूळे काढण्याची, रीति.

कोणतेही मूळ काढिल्याचे पूर्वी व्यवहारी अपूर्णांकास अनिसंक्षेप रूप दिलें पाहिजे. नंतर.

१ जर छेद पूर्णघात असेल तर अंश छेदांचीं वर्गमूळे वेगळाहीं पूर्वरीतीनें काढून त्याचे त्याचे स्थळीं लिहावीं; छेद असे नसतील तर

२ अंश आणि छेद परस्पर गुणून गुणाकाराचें मूळ काढावें; नंतर हें मूळ सांगितले अपूर्णांकाचे अंश स्थळीं किंवा छेदस्थळीं लिहावें, ह्मणजे तें रूप त्या अपूर्णांकाचें वर्गमूळ झालें.

$$\text{म्हणजे } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{a}{\sqrt{ab}}$$

ही सामान्य रीति स्तब्धमूळ आणि अनंत मूळ या दोहोंवर ही चालते.

३ अथवा व्यवहारी अपूर्णांकास दशांश रूप देऊन मग वर्गमूळ काढावें.

४ भागानुबंध पूर्णांकास व्यवहारी विषम अपूर्णांक रूप देऊन मग प्रथम आणि दुसरी या रीती करून त्याचें मूळ काढितां येईल, अथवा त्यांतील अपूर्णांकास दशांश रूप देऊन ते दशांश त्या पूर्णांकाशी जोडून मग त्याचें मूळ काढावें.

उदाहरणे.

प्रथम, $\frac{३६}{१६}$ याचें वर्गमूळ काय १ उत्तर, $\frac{६}{४}$.

दुसरे, $\frac{१४४}{१६}$ याचें वर्गमूळ काय १ उत्तर, $\frac{१२}{४}$.

तिसरे, $\frac{१४४}{१६}$ याचें वर्गमूळ काय १ उत्तर, $\frac{१२६०२५}{१६}$.

चवथें, $\frac{१२१}{१६}$ याचें वर्गमूळ काय १ उत्तर, $\frac{११५४९७}{१६}$.

पांचवें, $\frac{१७१}{१६}$ याचें वर्गमूळ काय १ उत्तर, $\frac{४१६०३३३}{१६}$.

वर्गमूळाचे सहायानें कोणतेही घाताचें मूळ मिघतें, ज्याचा प्रकाशक २ याचा कोणताही घात आहे, जसें, चतुर्घात मूळ, अष्टघातमूळ, षोडश घात मूळ इत्यादि. प्रकाशक दोहोंचा वर्ग आहे तर वर्गमूळाकडून पुनः त्याचें वर्गमूळ काढावें. असें द्विरावृत्त मूळ काढावें, अष्टघाताचें त्रिरावृत्त मूळ इत्यादि.

म्हणजे २१०३५८ याचें चतुर्घातमूळ काढणें तर वर्गमूळरवालीं सांगतां याप्रमाणें द्विरावृत्त काढिलें पाहिजे.

२१०३५८०००० (१४५०३७२१२०४३१४०७) हें चतुर्घातमूळ.

१		१	
२४	११०	२३	४५
४	९६	२	४४
२५५	१४३५	२४०४	११३७२
५	१४३५	४	९६९६
२९००३	१०८०००	२४०८३	७५६३७
३	८७००९	३	७२२४९
२९००६	२०९९१ (७२३७)		३३८८ (१४०७)
	६८७		९८०
	१०७		१७

दुसरें, ९७४१ याचें चतुर्घात मूळ काय ?

घनमूळ काढायाची प्रथम सामान्य रीति :

※ सांगितली संख्या तीन तीन अंकस्थळांचे भागांनीं भागायाचें कारण हेंच आहे कीं, केवळ एक अंकाचा घन तीन अंकस्थळांपेक्षा अधिक होत नाही. आणि अशा कारणास्तव चतुर्घात मूळ काढणें तर सांगितली संख्या चारचार अंकस्थळांचे अंकांनीं भागावी ; पंचघात मूळ काढणें तर पांच पांच अंकस्थळांचे भागांनीं या प्रमाणें पुढेंही.

रीतीचे दुसरे भूमिकेस बीजघन आश्रय आहे; कांजर मूळांस अ + व; हां दोन पदे आहेत, तर त्याचा घन पुढें लिहितों याप्रमाणें आहे, (अ + व)^३ = अ^३ + ३अ^२व + ३अव^२ + व^३. यांत प्रथमपद अ^३ त्याचें मूळ अ आहे; नवाभाज्य ३अ^२व + अव^२ + व^३ हा आणि शेष पद यांची वेगळाती पदेबरोबर आहेत; पुनः भाजक ३अ^२ + ३अ, आहे ज्यानें नवे भाज्याची ३अ^२व + अव^२ या दोनपदांस भागून मूळाचें दुसरें पद व उत्पन्न होतें; असें पुढेंही.

१ सांगितले संख्येस तीन तीन अंकस्थळांचे भागांनीं घालीतीनें भागा-
वी, संख्येंतील एकमस्थळांचे अंकावर बिंदू करावा, नंतर सहस्रंमचे स्थळां
चे अंकावर दुसरा बिंदू करावा, याप्रमाणें पुढेंही. म्हणजे केले बिंदू पासून-
डावेकडे दोन स्थळे सोडून निसर्ग्यावर करावा, याप्रमाणें पूर्णांकांत एकम
चे स्थळांपासून डावेकडे बिंदू करीत जावें, आणि दशांशांत उजवेकडे. नं-
तर डावेकडील शेवटचे प्रथम भागांत अति मोठा घन काय आहे ते शोधवें.
आणि त्याचें मूळ उजवेकडे जेथें भागाकार लिहिलान तेथें माडावें. नंतर
शोधून काढिलेला अति मोठा घन त्या प्रथम भागांतून वजा करावा. आणि
बाकी राहिल तिचे उजवेकडे भाज्याकरितां वरचा दुसरा भाग घ्यावा त्या
स नवा भाज्य ह्मणावा.

२ वर लिहिलेले मुळाचे वर्गाची तिप्पट करून लिहावी; आणि त्याचें
रवालीं त्याच मूळाची तिप्पट करून एक अंक स्थळ पुढें जाई अशी लिहावी.
आणि त्यांची बेरीज घ्यावी, या बेरिजेस नवा भाजक ह्मणावें, नंतर भा-
ज्याचा शेवटील अंक सोडून राहिली संख्या या भाजकानें भागितां भा-
गाकार काय होईल तो त्या मुळाचे जवळ लिहावा. आतां मूळ स्थळां दो-
न अंक झाले, त्यांत प्रथमास अनावडेवावें, आणि दुसऱ्यास ई.

३ या पुढील तीन गुणाकारांची बेरीज घ्यावी, ह्मणजे तिप्पट अचा
वर्ग गुणिला ई, तिप्पट अ गुणिला ई वर्ग, आणि ई घन. हे तीन गु-
णाकार अनुक्रमें एकेक अंक स्थळ पुढें सारून लिहावे, नंतर त्यांचे बे-
रिजेस हीनकर्तव्य नाव ठेवावें. परंतु हा नवे भाज्या पेक्षा अधिक नसावा,
कदाचित् अधिक झालातर मूळस्थळांचा शेवटील ई अंक उणाकरित गे-
लें पाहिजे जों पर्यंत हा हीनकर्तव्य, नवे भाज्या पेक्षा उणा येईल.

४ नवे भाज्यांतून हीनकर्तव्य वजा करावा, आणि बाकी पुढें नवे भाज्या
करितां वरचा दुसरा भाग जोडावा; त्यास नवा भाजक असावा तो मग
के मूळस्थळांचे अंकांपासून पूर्व प्रमाणें उत्पन्न करावा; या नवे भाज्य भा-
जकां पासून रीतीचे दुसरे भूमिके प्रमाणें मूळाचा दुसरा अंक उत्पन्न हो-
ईल, आणि आ प्रमाणें पुढेंही.

उदाहरणें.

प्रथम, ४८२२८५४४ याचें घनमूळ काढ.

(४८)

$$\begin{aligned} २+२^२ &= २७ \\ २+२ &= ०९ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ४८ \cdot २२८ \cdot ५४४ \cdot ८३६ \cdot ६ \\ २७ \end{aligned}$$

हें, घनमूळ.

नवा भाजक २७९ २९२२८ नवा भाज्य.

$$\begin{aligned} २+२+६ &= १६२ \\ २+२+६^२ &= ३२४ \\ ६^३ &= २१६ \end{aligned}$$

बेरीज ये.

$$\begin{aligned} २+२६^२ &= २८८८ \\ २+२६ &= १०८ \end{aligned}$$

१९६५६ शोधक.

नवा भाजक. २८९८८ १५७२५४४ नवा भाज्य.

$$\begin{aligned} २+२६^२+४ &= १५५५२ \\ २+२६+४^२ &= १७२८ \\ ४^३ &= ६४ \end{aligned}$$

बेरीज ये.

$$\begin{aligned} १५७२५४४ \\ \hline ००००००० \end{aligned}$$

शोधक.

दुसरे, ५७१४८२१९ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर, ८२९ इत्यादि.

तिसरे, १६२८१५८२ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर, ११७६४२

चवथें, १३३२ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर, ११००२७.

दुसरी संक्षेपानें घनमूळ काढायाची. :

१ सगळ्यानें अथवा मूळ कोंडकांपासून, एव ७७ इत्यादि. सांगितले संरच्येचा संनिध अधिक किंवा उणा अरवेंड घन घ्यावा, आणि त्यास ये

⋈ घनमूळ काढण्याची जी सामान्यतः रीति सांगितली आहे ती फार दीर्घ कंदाळवाणी आणि स्मरणान् ठेवण्यास करीण, याजकरितां संनिध मूळ काढण्याच्या दुसऱ्या विविध रीति न्यूटन, राफ्सन्, हार्लीड ठात्री, सिंफ्रसन्, एमरसन, आणि दुसरे ज्योतिषी यांनी कल्पित्या आहेत. परंतु सरळ रूपाची आणि सामान्यतः कामात फार उपयोगी-अशी ही रीति पाहिती. याप्रमाणें त्यांत दुसरी कोणतीही नाही, तिचें बिजळ रूप हेच आहे.

जसें, $प+२अ$ अ+२प : र : ल, अथवा.

जसें, $प+२अ$: प~अ : र : ल~प.

यांत सांगितली संख्या आहे. अ. घेतलेला अतिसंनिध घन आहे, र, अचें घनमूळ आहे. आणि ल, पचें इच्छितें मूळ आहे.

५१५५८२३ आहे, आणि दुसरे भूमिकेंतील दुसरे प्रकारांचे कर्म करून या प्रमाणें होईल.

२१०२५३१८६५. इत्यादि.

२

२२०७०६१७२९० २१०३५८
२१०३५८ २१०३५३१८६५. इत्यादि.

६३१०६८३७२९. २८१३५५. २७६०८३. ०००२१०५६०
०००२१०५६०

२७६०८३७२९. हे अतिसंभि
ध मूळ.

दुसरे. ६२ याचें घनमूळकाढ.

तिसरे. ०१ याचें घनमूळकाढ.

कोणतेही मूळकाढण्याची *

प. हें सांगितले संरत्येचे अक्षर निव्ह प्रसन्न, न, हें सांगितले सं-
रत्येचें वर्गमूळारिप्रकाशक अक्षर निव्ह. अ. हे कोणती घेतले मूळा
चे वर्गादीचें अक्षर निव्ह. र. हें या घेतले वर्गादीचें मूळ. ल. हें पत्तें इ
छिलें मूळ; नंतर या प्रमाणें ह्याणवें.

जशीन+१ वेळा अ आणि न-१ वेळा प हीं वरीज.

न+१ वेळा प आणि न-१ वेळा अ यांचे बेरिजेस होतः

तसें घेतलें मूळ रः इछिले ल या मूळाम होईल.

अथवा. जसें न+१ वेळा अ आणि न-१ वेळा प यांचे बेरिजेचे
अर्थ.

सांगितला आणि घेतला या घातांचें वजाबाकीस होईल.

तसें घेतलें मूळ रः घेतलें आणि रवरें या मूळांचे वजाबाकीस
होईल.

आणि ही वजाबाकी घेतले मूळांत मिळविली अथवा वजाकेली
जसें कामांत येईल त्या प्रमाणें केले असतां रवरें मूळ होईल.

मूळजे.

जसा न+१ अ + न-१ पः न+१ प + न-१ अः रः ल

* ही सान्निध मूळरिति, सगळ्या घातांचे मूळांस सामान्य आहे. आणि, पूर्वी सां-
गितली ती विशेषरिति घन मूळावर गात्र आगत.

अथवा .

$\overline{न+१} = \frac{१}{२} \text{ अ } + \overline{न-१} = \frac{१}{२} \text{ प } : \text{प} = \text{अ} : \text{र} ; \text{ल} = \text{र}$

आणि या प्रमाणें पुनः पुनः करून दुसरें दुसरें खरें मूळ काढावें परंतु प्रत्येक प्रमाणांत शेवटीं निघेलतें मूळ र. आणि त्या मूळाचापन न. आणि घेतलेवर्गादि अ, होईल; या प्रमाणें प्रस्तरचिन्हें करावीं.

उदाहरणें.

२१०३५ = याचें पंचपातमूळ काढावयाचें.

या उदाहरणां दिसतें कीं. याचें पंचपात मूळ ७३ आणि ७४ या २ संख्यांचे मध्ये आहे. आतां ७३ हें घेतलें मूळ याचा पंचपात २० ७३० ७१५०३ यांत प = २१०३५, न = ५, र = ७३, अ = २०७३० ७१५०३. तर दुसरें रीतिप्रमाणें.

५		४		३	
६२१०३	१४७७०५	४२५७९६	९१५	५५३	
२२७७९६			२१३५	५८८	
१०४३६३	७४७७०५	७२७७	११३२		

१०२७ १११३ $\left\{ \begin{array}{l} ५३१३६०५ \text{ र = ल} \\ ७३ = \text{र} \end{array} \right.$

७३०१३६०५ = ल हें इच्छिलें पंचपातमूळ होय.

दुसरें उदाहरणें.

प्रथम. २ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर १२५००२१.

दुसरें. ३०१४ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर, १४७९७५८.

तिसरें. ५ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर, ११८०२०७

चवथें. ९७ ४१ याचें चतुर्थात मूळ काढ.

उत्तर, ३५४१९९९

पांचवें. २ याचें पंचपातमूळ काढ.

उत्तर, ११४८६०९.

सातवें. २१०३५ = याचें पडपातमूळ काढ.

उत्तर, ७३ ७४ ७५ ७६ ७७

सातवें, ५ याचें षड्घातमूळकाट.

उत्तर, १०१२२४६३.

आठवें, २१०३५०८ याचें सप्तघातमूळकाट.

उत्तर, ४०१४५३००

नववें, २ याचें सप्तघातमूळकाट.

उत्तर, १०१०४०८९.

दाहावें, २१०३५०८ याचें अष्टघातमूळकाट.

उत्तर, ३४७०३३३

अकरावें, २ याचें अष्टघातमूळकाट.

उत्तर, १००९०५०८.

बारावें, २१०३५०८ याचें नवघातमूळकाट.

उत्तर, ३०२२२३९.

तेरावें, २ याचें नवघातमूळकाट.

उत्तर, १०८००५०.

जे पुढें लिहिलेले १ पासून १००० पर्यंत संख्यांचे वर्ग, आणि घन, याचें, व, वर्गमूळ, आणि घनमूळ यांचे कोष्टक आहेत, आणि ते गणित कर्मांत जेथें मूळें आणि घात. याचें काम येतें तेथें फार-उपयोगी पडतील.

या कोष्टकांचा उपयोग शून्य अथवा दशांश चिन्हाचें स्थळ व दल केल्यानें बहुत संख्यांचे कामांत येतो, जसें या पुढील उदाहरणा पासून कळेल.

मूळ.	वर्ग.	घन.
३६	१२९६	४६६५६
३६०	१२९६००	४६६५६०००
३६००	१२९६००००	४६६५६००००००
५४६	२९८११६	१६२७७१३३६
५४६	२९८११६	१६२७७१३३६
५४६	२९८११६	१६२७७१३३६

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या.	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
१	१	१	१.००००००००	१.०००००००
२	४	८	१.४१४२१३६	१.२५९९२१
३	९	२७	१.७३२०५०८	१.४१४२१५०
४	१६	६४	२.००००००००	१.५८७४०१
५	२५	१२५	२.२३६०६८०	१.७०८१७६
६	३६	२१६	२.४४९४८८७	१.८१७१२१
७	४९	३४३	२.६४५७५१३	१.९१२८३३
८	६४	५१२	२.८२८४२७१	२.०००००००
९	८१	७२९	३.००००००००	२.०८००८४
१०	१००	१०००	३.१६२२७७७	२.१५४४३५
११	१२१	१३३१	३.३१६६२४००	२.२२३८८०
१२	१४४	१७२८	३.४६४१०१६	२.२८९४४८
१३	१६९	२१९७	३.६०५५५१३	२.३५१३३५
१४	१९६	२७४४	३.७४१६५७४	२.४१०१४३
१५	२२५	३३७५	३.८७२९८३३	२.४६६२१२
१६	२५६	४०९६	४.००००००००	२.५१९८४२
१७	२८९	४९१३	४.१२३१०५६	२.५७१३८४
१८	३२४	५८३२	४.२४२६४०७	२.६२०७४१
१९	३६१	६८५९	४.३५८८१८९	२.६६८४०३
२०	४००	८०००	४.४७२१३६०	२.७१४४१८
२१	४४१	९२६१	४.५८२५७५७	२.७५४८३३
२२	४८४	१०६४८	४.६९०४१५८	२.८०२०३९
२३	५२९	१२१६७	४.७९५८३१५	२.८४३८६७
२४	५७६	१३८२४	४.८९८१७९५	२.८८४४९०
२५	६२५	१५६२५	५.००००००००	२.९३४०१८
२६	६७६	१७५७६	५.०९९०१५५	२.९८४४९६
२७	७२९	१९६८३	५.१९६१५२४	३.०००००००

वर्ग, पन, प्राणिसूच.

संख्या	वर्ग	पन	वर्गसूच.	पनसूच
२८	७८४	२११५३	५७१५०२६	३०३६५८१
२९	८०१	२२१६०	५८३५१६०	३०७७२१७
३०	९००	२७०००	५८७७२२५६	३१०७२३२
३१	९६१	२७७११	५८५६७७६०४	३१२१३८१
३२	१०२४	३२७६०	५८६५६८५०३	३१७०८०३
३३	१०८९	३५९३७	५८७८१६३६	३२०७५३४
३४	११२६	३८३०४	५८८३०१५१०	३२३०६१२
३५	१२२५	४०८७५	५८९१६०७९८	३२७१०६६
३६	१३९६	४६६१६	६००००००००	३३०१९२७
३७	१३६९	५०६५३	६००३७६७५	३३३२३२३
३८	१४८८	५४८७३	६१६४४१४०	३३६१९७९
३९	१५२१	५६३१०	६३४४०१००	३३९१२११
४०	१६००	६००००	६३७४५१५३	३४१९६५३
४१	१६८१	६८१५१	६४०३१७४७	३४४८२१७
४२	१७६४	७४०८८	६४८८०७४०७	३४७६८०३
४३	१८४९	७८५०७	६५५७४३८०	३५०६३९८
४४	१९३६	८५१८४	६६३३४४१६	३५३५३४८
४५	२०२५	९११२५	६७०८७७३०	३५६५६८३
४६	२११६	९७३३६	६७८८०३३००	३५९३०४८
४७	२२०९	१०३८३३	६८५५६६५०६	३६२०८२३
४८	२३०४	११०५८२	६९२८२७३२	३६३८७२१
४९	२४०१	११७६८९	७०००००००००	३६६५१०८
५०	२५००	१२५०००	७००७१०३००	३६९२५३१
५१	२६०१	१३२६५३	७१०१०२८०	३७२०८३०
५२	२७०४	१४०८०	७२१११०२६	३७३२५११
५३	२८०९	१४८८७५	७२८०१०१०	३७५६६८८
५४	२९१६	१५७१६०	७३४८००००	३७८००६३

(५५)
वर्ग घन, आणमूळ

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ	घनमूळ
५५	३२५	३६६३७५	७ ४९६९९८५	३ ८०२९५३
५६	३२६	३७५६९६	७ ४८३३९८८	३ ८१५८६३
५७	३२७	३८५९९३	७ ५७०३४८८	३ ८२८९७३
५८	३२८	३९६९९२	७ ६९५७७३९	३ ८४२०७३
५९	३२९	४०८३७९	७ ८८९९४५७	३ ८५५१८६
६०	३६००	४६६०००	७ ७८५९६६७	३ ९९४८६३
६१	३७२९	४३६९८९	७ ८९०२४९७	३ ९३६९९७
६२	३८४८	४५८३२८	७ ८७०००७९	३ ९५७८९२
६३	३९६९	४८००८७	७ ९३७७५३९	३ ९७९९५७
६४	४०९६	४८२९४८	८ ०००००००	४ ००००००
६५	४२२५	४७४६३५	८ ०६०२५७७	४ ०२०३२६
६६	४३५६	४८७४८६	८ ९३००३८८	४ ०४९१८०
६७	४४८८	४९०७६३	८ ९८५३५२८	४ ०६९५८८
६८	४६१९	४९४०३४	८ ९८०१९९३	४ ०८९६९६
६९	४७५१	४९७५०९	८ ९८५६३३९	४ १०९५३५
७०	४८८३	४९७५००	८ ९८६६५५३	४ १२९६३५
७१	५०१५	४९७०९९	८ ९८०१९८८	४ १४९७९८
७२	५१४८	४९७३४८	८ ९८०३८९८	४ १६९९९८
७३	५२८०	४९८०९७	८ ९८०००३७	४ १९०३३०
७४	५४१६	४९८८४८	८ ९८०३२५३	४ १९०३३६
७५	५६५९	४९९८७९	८ ९८०३५८०	४ २१०७९३
७६	५७७६	४९९८७६	८ ९८०३९७९	४ २३०८८८
७७	५९२९	४९९८७३	८ ९८०४३८४	४ २५०३२९
७८	६०८८	४९९८७५	८ ९८०४७८९	४ २७०८५०
७९	६२४९	४९९८७३	८ ९८०५१८४	४ २९०८८९
८०	६४१०	४९९८७०	८ ९८०५५८९	४ ३१०८७०
८१	६५७१	४९९८७५	८ ९८०५९८९	४ ३३०८४०
८२	६७३२	४९९८७८	८ ९८०६३८९	४ ३४०८९९

वर्ग. पन प्राणिमूत्र.

संख्या	वर्ग	पन	वर्गमूत्र	पनमूत्र.
१५१	१०८८१	२८०३३३१	११०८७५३५१	५०२०५८२८
१५२	२०१६५	३८६३२८८	११०९१६३७५३	५०२१७१०३
१५३	२०५५६	२१२५२०७	११०९५८२६०७	५०२२१३२१
१५४	३१७३६	२१८५६८८	१२००००००००	५०२५१५८३
१५५	२१०२५	३०५८६२५	१२००११५८५६	५०२५३५८८
१५६	२१३१६	३११२१३६	१२०८३०५६०	५०२६५६३७
१५७	२१६०६	३१७६५२३	१२०१२५३५५७	५०२७७६३३
१५८	२१९०५	३२५१७०२	१२०१६५५२५१	५०२८९९७२
१५९	२२२०१	३३०७९५८	१२०२०६५५६	५०३०१५५८
१६०	२२५००	३३७५०००	१२०२४७५५८७	५०३१३२६३
१६१	२२८०१	३४५३०५१	१२०३८८२७५७	५०३२५०७५
१६२	२३१०५	३५११८०८	१२०३२८८२८०	५०३३६८७३
१६३	२३४०६	३५८१५७७	१२०३६९३३१६८	५०३४८५८१
१६४	२३७१६	३६५२०६५	१२०४०९६७३६	५०३६०१०८
१६५	२४०२५	३७२३८७५	१२०४५०९९६	५०३७१६८५
१६६	२४३३६	३७९६५१६	१२०४९१०६०	५०३८३२१३
१६७	२४६४८	३८६९८१३	१२०५३२१६५१	५०३९४६११
१६८	२४९६५	३९४५३१३	१२०५६९८०५१	५०४०६१२०
१६९	२५२८१	४०१९६७९	१२०६०९५२०९	५०४१७५०१
१७०	२५६००	४०९६०००	१२०६५०१०१६	५०४२८८३५
१७१	२५९२१	४१७३२८१	१२०६८८५७७५	५०४४०१२२
१७२	२६२४५	४२५१५२८	१२०७२७९२२१	५०४५१३६३
१७३	२६५६९	४३३०७५७	१२०७६७१५३	५०४६२५५६
१७४	२६८९६	४४१०९५५	१२०८०६२५८५	५०४७३७०५
१७५	२७२२५	४४९२१२५	१२०८४५२३२६	५०४८४८०६
१७६	२७५५६	४५७५२६६	१२०८८४०९८७	५०४९५८६५
१७७	२७८८९	४६५७३६३	१२०९२२८५८०	५०५०६८७८
१७८	२८२२५	४७३९६३२	१२०९६१५८१५	५०५१७८८८
१७९	२८५६१	४८२६८०९	१२०१०००००००	५०५२८७७५
१८०	२८९००	४९१३०००	१२०१०३८१०५८	५०५३९६५८

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ,	घनमूळ,
१७१	२८२४१	५०००२११	१३००६५६८	५५५०४१९
१७२	२८५८४	५०८८४४८	१३०११४०००	५५६१३१८
१७३	२८९२९	५११७७१३	१३०१६२४६४	५५७२०५५
१७४	३०२७६	५२६८०२४	१३०१९०६०	५५८२७७०
१७५	३०६२५	५३५९३७५	१३०२२८७५६६	५५९३४४५
१७६	३०९७६	५४५१७७६	१३०२६६८६८३	५६०४०७०
१७७	३१३२८	५५४५२३३	१३०३०४९३४७	५६१४७७३
१७८	३१६८४	५६३९७५२	१३०३४३६८४९	५६२५४८५
१७९	३२०४१	५७३५३३९	१३०३८१९०८८२	५६३६२०१
१८०	३२४००	५८३२०००	१३०४२००७०	५६४६९१६
१८१	३२७६१	५९२९७४१	१३०४५३६२४०	५६५७६५३
१८२	३३१२४	६०२८५६८	१३०४९०७३७६	५६६८३५१
१८३	३३४८९	६१२८४८७	१३०५२७७४५३	५६७९०४९
१८४	३३८५६	६२२९१०४	१३०५६४८६००	५६८९७७४
१८५	३४२२५	६३३१६३५	१३०६०१४७०५	५६९०५१९
१८६	३४५८६	६४३४८५६	१३०६३८९८१७	५७०१२५३
१८७	३४९४९	६५३८२०३	१३०६७७०५३	५७११९८८
१८८	३५३१४	६६४१६७३	१३०७१४००१२	५७२२७५४
१८९	३५७२१	६७५१२६९	१३०७५०३२७१	५७३३५१९
१९०	३६१००	६८६९०००	१३०७८०४४८८	५७४४२९७
१९१	३६४८१	६९८७८७१	१३०८१०२७५०	५७५५०८५
१९२	३६८६४	७००७७८८	१३०८४००६६९	५७६५८९८
१९३	३७२४९	७१२९०५७	१३०८६९८४०	५७७६७१६
१९४	३७६३६	७२५१३८४	१३०८९९६८३	५७८७५३६
१९५	३८०२९	७३७४८७५	१३०९२९९००	५७९८३६०
१९६	३८४१६	७५०९५३६	१३०९६०००००	५८०९१८६
१९७	३८८०९	७६४५३७३	१३०९९०१६८८	५८१९९४८
१९८	३९२०४	७७८६३३९३	१३१०२०२७३३	५८३०७७६
१९९	३९६०१	७८८०५९९	१३१०५०३३६०	५८४१६०७
२००	४००००	८००००००	१३१०८०३५६६	५८५२४३५

वर्ग, घन, भाणिसूच.

संख्या	वर्ग	घन	वर्गसूच	घनसूच.
२०१	२०४११	८१२०६०१	१२१७७७२६९	५०८५७७६५
२०२	२०८०२	८२२२४०८	१२२१६७००२	५०८६७२६२
२०३	२१२०३	८३६५२३७	१२२७८०६८	५०८७७१३०
२०४	२१६१६	८४८९६६४	१२२८२८५६९	५०८८७६६५
२०५	२२०२५	८६१५१२५	१२३१७८२११	५०८९६३६८
२०६	२२४३६	८७४१८१६	१२३५२७००१	५०९०५९२१
२०७	२२८४९	८८५९७२३	१२३८७२९२६	५०९१५२८२
२०८	२३२६२	८९८८९१२	१२४२२२०५१	५०९२४१६२
२०९	२३६८१	९१२३३२९	१२४५६८३२३	५०९३४७३
२१०	२४१००	९२६१०००	१२४९१३७६७	५०९४५२२२
२११	२४५२१	९३९३९३१	१२५२५८३९०	५०९५६३२२
२१२	२४९४२	९५२८१२८	१२५६०२१९८	५०९६७३३१
२१३	२५३६९	९६६३५९७	१२५९५११५५	५०९७८०२१
२१४	२५७९६	९८००३२२	१२६२८७३८८	५०९८९२६८
२१५	२६२२५	९९३८३७५	१२६६२८७८३	५०९९०७२७
२१६	२६६५६	१००७७६९६	१२६९६९३८५	५१००००००
२१७	२७०८५	१०२१८३१३	१२७३०९१९९	५१००९२२२
२१८	२७५२२	१०३६०२३२	१२७६५०२२१	५१०१८२६३
२१९	२७९६१	१०५०३२५९	१२७९९८२८६	५१०२७३१०
२२०	२८४००	१०६५००००	१२८३४३९७०	५१०३६८११
२२१	२८८४१	१०७९३८६१	१२८६९०९८७	५१०४५९२३
२२२	२९२८२	१०९४१०४८	१२९०३९६६२२	५१०५५०२८
२२३	२९७२९	११०८९५६७	१२९३८१०२५	५१०६४१२६
२२४	३०१७६	११२३९१२२	१२९७२६२५५	५१०७३१७८
२२५	३०६२५	११३९०६२५	१३००७००००	५१०८३३०१
२२६	३१०७६	११५४३१७६	१३०४२३२९२	५१०९११९९
२२७	३१५२९	११६९७०८३	१३०७६६५१२	५११००१७०
२२८	३१९८२	११८५२३५२	१३१०९९६६८	५११०९११५
२२९	३२४३१	१२००८९८९	१३१४३७७६०	५१११८०२३
२३०	३२८८०	१२१६७०००	१३१७८५७५०	५११२६९३५

वर्ग, पन आणि मूळ

संख्या,	वर्ग,	पन,	वर्गमूळ,	पनमूळ.
२३१	५३३६१	१२३२६३ ८१	१५११८६८२	६१३५७८३
२३२	५३८२२	१२४८७१६८	१५२३१५४६२	६१४४६३४
२३३	५४२८८	१२६४८३३७	१५२६४३३७५	६१५३४४८
२३४	५७५६	१२८१२१०४	१५२९७०५८५	६१६२३३९
२३५	१५३२५	१२८७७८७५	१५३२८७०८७	६१७१००५
२३६	५५६८६	१२९४४२५६	१५३६३३८१५	६१७८७७७
२३७	५६१६८	१३३१२०५३	१५३८४८०४३	६१८८४६३
२३८	५६६४४	१३४८१३७२	१५४२७३४८६	६१९७११४
२३९	५७१३१	१३६५१८१८	१५४५८६२४८	६२०५८३३
२४०	५७६००	१३८२४०००	१५४८१८३३४	६२१४४६५
२४१	५८०८१	१३९८७५२१	१५५२४१७४७	६२२३०८४
२४२	५८५६४	१४१७३४८८	१५५५६३४८२	६२३१८७६
२४३	५८०४८	१४३४८१७७	१५५८८४५७३	६२४०२५१
२४४	५८५३६	१४५३६७८४	१५६२०४८८४	६२४८८००
२४५	६००२५	१४७०६१३५	१५६५२४७५४	६२५७३३४
२४६	६०५१६	१४८८६८३६	१५६८४३८७१	६२६५८२६
२४७	६१००८	१५०६८२२३	१५७१६२३३६	६२७४३०४
२४८	६१५०४	१५२५२८६२	१५७४८०१५७	६२८३७६०
२४९	६२००१	१५४४३८४८	१५७७८७३३८	६२९११५५
२५०	६२५००	१५६२५०००	१५८११३८८३	६२९८८०५
२५१	६३००१	१५८१३३११	१५८४२८७८५	६३०७८८३
२५२	६३५०४	१६००३००८	१५८७४५०७५	६३१६३८८
२५३	६४००५	१६१८४३७७	१५९०५६७३७	६३२४७०४
२५४	६४५१६	१६३८७०६४	१५९३७३७७५	६३३३०२६
२५५	६५०२५	१६५८१३७५	१५९६८७१८४	६३४१३३६
२५६	६५५३६	१६७७७३१६	१६०००००००	६३४८८०४
२५७	६६०४८	१६९७४५३३	१६०३१२१८५	६३५७८६१
२५८	६६५६४	१७१७३५१३	१६०६२३७८४	६३६६०६५
२५९	६७०८१	१७३७३८८८	१६०९३४७६५	६३७४३११
२६०	६७६००	१७५७६०००	१६१२४५१५५	६३८२५०४

वर्ग, पन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	पन.	वर्गमूळ.	पनमूळ.
२६१	६०१२१	१७७७६५८१	१६.१५१५५५	६.२१०६७६
२६२	६०६५५	१७८८५७७८	१६.१८६५१५	६.२१८८२८
२६३	६११६८	१८१८१५७७	१६.२१७८७७७	६.२०६५५८
२६४	६०६८६	१८२११७५५	१६.२५८०७६८	६.२१५०६८
२६५	७०२२५	१८६०८६२५	१६.२७८८२०६	६.२२३१५८
२६६	७०७५६	१८८२१०१६	१६.३०८५०६५	६.२३१२३८
२६७	७१२८८	१९०३५१६३	१६.३५०१३५६	६.२३१२७७
२६८	७१८२५	१९२५८८३२	१६.३७०७०५५	६.२५७३०५
२६९	७२३६१	१९४६५१५८	१६.४०१२१५५	६.२५५३१५
२७०	७२९००	१९६८२०००	१६.४३१६७६७	६.२६३०५
२७१	७३५५१	१९९०२५११	१६.४६२०७७६	६.२७१२७५
२७२	७३८८५	२०१२३६५८	१६.४९२५२२५	६.२७०२२५
२७३	७४५२८	२०३५६५७७	१६.५२२७११६	६.२८७१५५
२७४	७५०७६	२०५७०८२५	१६.५५३१५५५	६.२९५०६५
२७५	७५६२५	२०७९६८७५	१६.५८३१२५०	६.३०३५५६
२७६	७६१७६	२१०२५५७६	१६.६१३२७७७	६.३१०८३०
२७७	७६७२८	२१२५३८३३	१६.६४३३१७०	६.३१८६८५
२७८	७७२८५	२१४८५८५२	१६.६७३३३२०	६.३२६५१८
२७९	७७८५१	२१७१७६३८	१६.७०३२८३१	६.३३४३३५
२८०	७८४००	२१९५२०००	१६.७३३३००५	६.३४२१३३
२८१	७८९६१	२२१८८०५१	१६.७६३२०५६	६.३५०८१२
२८२	७९५२५	२२४२५७६८	१६.७९२८५५६	६.३५७६७७
२८३	८००८८	२२६६५१८७	१६.८२२८०३८	६.३६५५१५
२८४	८०६५६	२२९०६३०५	१६.८५२२८८५	६.३७३११८
२८५	८१२२५	२३१५११२५	१६.८८१८५३०	६.३८०८५५
२८६	८१८८६	२३३८२६५६	१६.९११५३५५	६.३८८५३२
२८७	८२३६८	२३६१५८०३	१६.९४१०७५३	६.३९६२०१
२८८	८२९५५	२३८८७८७३	१६.९७०५६२७	६.४०३८५५
२८९	८३५२१	२४११७५६८	१७.०००००००	६.४११५८५
२९०	८४१००	२४३८८०००	१७.०२९३८६५	६.४१८१०६

वर्ग.पन, भाणिमूळ.

संख्या	वर्ग	पन	वर्गमूळ.	पनमूळ.
२८१	८५६८१	२५६५२१७१	१७.०५८७२२१	६.६२६७०५
२८२	८५२६५	२५८१७०८८	१७.०८८००७५	६.६३५२८७
२८३	८५८५१	२५१५३७५७	१७.११७२५२८	६.६५८५२
२८४	८६५३६	२५५१२१८५	१७.१५६५२८२	६.६५३३६६
२८५	८७०२५	२५६७२३७५	१७.१७१५६५०	६.६५६१३०
२८६	८७६१६	२५८३७३३६	१७.२०५६५०५	६.६६५५५५
२८७	८८२०१	२६१८८७७३	१७.२३३६८७६	६.६७१८५०
२८८	८८८०५	२६५६३५८२	१७.२६२६७६५	६.६७८५२०
२८९	८९५०१	२६७३०८८९	१७.२९१६१६५	६.६८६८८२
२९०	९००००	२७००००००	१७.३२०५०८१	६.६९५३३०
२९१	९०६०१	२७२७०५०१	१७.३५८३५१६	६.७०१७७८
२९२	९१२०५	२७५५३६०८	१७.३७८१५७३	६.७०८१७७
२९३	९१८०९	२७८१८१२७	१७.४०६८८५३	६.७१६५७०
२९४	९२४१६	२८०८५५६५	१७.४३५५८५८	६.७२३९६९
२९५	९३०२५	२८३७२६२५	१७.४६४३५८२	६.७३१३९६
२९६	९३६३६	२८६५३६१६	१७.४९३८५१७	६.७३८८६५
२९७	९४२५१	२८९३५५३३	१७.५२३५५५५	६.७४५८८७
२९८	९४८६५	२९२१८११२	१७.५५२८७८८	६.७५३३१३
२९९	९५४८१	२९५०३६३९	१७.५८२३१५८	६.७६०६१५
३००	९६१००	२९७८१०००	१७.६०६८१६९	६.७६७८८९
३०१	९६७२१	३००८०२३१	१७.६३५११२१	६.७७५१९८
३०२	९७३५५	३०३७१३२८	१७.६६३५२१७	६.७८२५२३
३०३	९७९६०	३०६६५२८७	१७.६९२८०६०	६.७८९८६५
३०४	९८५८६	३०९५५१५५	१७.७२२००५१	६.७९७८८८
३०५	९९२१०	३१२५५८७५	१७.७५०८२३३	६.८०५९६२
३०६	९९८५६	३१५५५५८६	१७.७७९६३८८	६.८१३९८५
३०७	१०००५	३१८५५०१३	१७.८०८५५१८	६.८२१९८८
३०८	१०११२५	३२१५७५३२	१७.८३७५५५५	६.८२९८८२
३०९	१०१७६१	३२४६१७५९	१७.८६०५७११	६.८३७८७५
३१०	१०२५०५	३२७६८०००	१७.८८८५८३८	६.८४५८८५

वर्ग, घन, आणिसूच.

संख्या.	वर्ग.	घन.	वर्गसूच.	घनसूच.
३२१	१०३०२१	३३०७६१६१	१७.८१६७३८	६.८७७०२९
३२२	१०३६८४	३३३८६२४८	१७.८४७३६८	६.८५४१२४
३२३	१०४३४९	३३६९८२६७	१७.८७२२००	६.८६१२१२
३२४	१०४९७६	३४०१२२२४	१८.००००००	६.८६८२८५
३२५	१०५६२५	३४३२८१२५	१८.०२७७५६४	६.८७५३४४
३२६	१०६२७६	३४६४५९७६	१८.०५५४००९	६.८८२३८८
३२७	१०६९३१	३४९६५७८३	१८.०८३१४१३	६.८८९४१८
३२८	१०७५८४	३५२८७५५२	१८.११०७७०३	६.८९६४३५
३२९	१०८२४१	३५६११२८९	१८.१३८३५७१	६.९०३४३६
३३०	१०८९००	३५९३७०००	१८.१६५१०२९	६.९१०४२३
३३१	१०९५६१	३६२६४६९१	१८.१९२४०५४	६.९१७३८६
३३२	११०२२४	३६५९४३४८	१८.२२००८७२	६.९२४३५५
३३३	११०८८९	३६९२२९७७	१८.२४८२८७६	६.९३१३००
३३४	१११५५६	३७२५१७०४	१८.२७५६६६८	६.९३८२३२
३३५	११२२२५	३७५८१३७५	१८.३०३००५२	६.९४५१४८
३३६	११२८९६	३७९१३०५६	१८.३३०३०२८	६.९५२०२३
३३७	११३५६९	३८२४३७५३	१८.३५७५५६८	६.९५८९४३
३३८	११४२४४	३८५७४४७२	१८.३८४७७६३	६.९६५८१८
३३९	११४९२१	३८९०५२१८	१८.४११९५७६	६.९७२८८३
३४०	११५६००	३९२३०४०००	१८.४३९१८८३	६.९७९९५३
३४१	११६२८१	३९५६१८२१	१८.४६६१८५३	६.९८६३६८
३४२	११६९६४	४०००१६८८	१८.४९३२४२०	६.९९३१८१
३४३	११७६४९	४०३५३६०७	१८.५२०२५८२	७.००००००
३४४	११८३३६	४०७०७५८४	१८.५४७२३७०	७.००६७१६
३४५	११९०२५	४१०६३६२५	१८.५७४१७५६	७.०१३५७८
३४६	११९७१६	४१४२१७३६	१८.६०१०७५२	७.०२०३४८
३४७	१२०४०९	४१७८१८२३	१८.६२७८३६०	७.०२७१०६
३४८	१२११०४	४२१४४१९२	१८.६५४७५८१	७.०३३८५०
३४९	१२१८०१	४२५०८५४९	१८.६८१५४१७	७.०४०५८१
३५०	१२२५००	४२८७५०००	१८.७०८३८६८	७.०४७३२८

वर्ग, पन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग,	पन,	वर्गमूळ	पनमूळ.
३५१	१३१३११	४३३४३५५५	१८०३३५५५५	७०५५५५५
३५२	१३३१००	४३६१४३००	१८०७६१६६३०	७०६०६०६
३५३	१३४६००	४३८६६०००	१८०७८८३१४३	७०६५७६६
३५४	१३५३१६	४४३६८८६	१८०८१०८८७७	७०७०८७३
३५५	१३६०३५	४४७३१८७५	१८०८४१४४३०	७०७५९१८
३५६	१३६७३६	४५११०८३६	१८०८६७१६३३	७०८०९३१
३५७	१३७४४५	४५४८१३४३	१८०८९४४४३६	७०८६०००
३५८	१३८१६४	४५८८३७३३	१८०९२०८८८९	७०९१०४०
३५९	१३८८८९	४६३३८८७९	१८०९४७३६५३	७०९६१५३
३६०	१३९६००	४६६५६०००	१८०९७३६६६०	७१०१२८६
३६१	१३९७३९	४७००५८८९	१८०९९९०००००	७१०६३७७
३६२	१३९८४४	४७४३७१३८	१८१०२६३६३६	७१११६३६
३६३	१३९९६६	४७८६३१४३	१८१०५२५५८६	७११६७४३
३६४	१४००८६	४८३३८५४४	१८१०७८७८८७	७१२१८५७
३६५	१४०२०५	४८६६७१३५	१८११०४९७३३	७१२६९६०
३६६	१४०३२५	४९०९३८६६	१८११३११८६५	७१३२०८०
३६७	१४०४६०	४९५२०८६३	१८११५७३४४७	७१३७१९०
३६८	१४०५८४	४९९४७८३३	१८११८३५५६१	७१४२३०५
३६९	१४०७०९	५०३७४८००	१८१२०९७७३०	७१४७४००
३७०	१४०८३०	५०८०१८०००	१८१२३६००८७	७१५२५०५
३७१	१४०९५५	५१२२८८११	१८१२६२३३०३	७१५७६०६
३७२	१४१०८०	५१६५५८८८८	१८१२८८५५५५	७१६२७०८
३७३	१४१२०५	५२०८२८९७	१८१३१४८०७९	७१६७८०८
३७४	१४१३३०	५२५०९९००	१८१३४१०७०६	७१७२९०३
३७५	१४१४५५	५२९३६९१५	१८१३६७२८१०	७१७८००८
३७६	१४१५८०	५३३६३९३०	१८१३९३५०१४	७१८३१०८
३७७	१४१७०५	५३७९०९४५	१८१४१९७१८८	७१८८२०८
३७८	१४१८३०	५४२१७९६०	१८१४४६०३५३	७१९३३०८
३७९	१४१९५५	५४६४४९७५	१८१४७२३५२८	७१९८४०८
३८०	१४२०८०	५५०७१९८०	१८१४९८६७०३	७२०३५०८

वर्ग. घन. आणिसूक्ष्.

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूक्ष्.	घनमूक्ष्.
३८१	१८५१६१	५५३०६३८१	१८.११८२११३	७.२८८५०८
३८२	१८५१८५	५५७८२५६८	१८.१८८८२०३	७.२५५८८१
३८३	१८६६८१	५६१८१८८७	१८.१७०३८५८	७.२६२१६७
३८४	१८७८५६	५६६२३१०८	१८.१८५८१७८	७.२६८८८२
३८५	१८८२२५	५७०६६६३५	१८.६३१८११८	७.२७८८८६
३८६	१८८१८६	५७५१२८५६	१८.६८६८८२७	७.२८१०७८
३८७	१८८७६८	५७९६०६०१	१८.६७३१५६	७.२८७३६२
३८८	१८९०१८८	५८४११०७२	१८.६८७०१५६	७.२८३६३३
३८९	१८९२२१	५८८६३८६८	१८.७३३०८२८	७.२८८८८८
३९०	१८९१००	५९३१९०००	१८.७८८८१७७	७.२९६१८३
३९१	१८९८८१	५९७७६८७१	१८.७७३७१८८	७.२९३३८३
३९२	१८३६६८	६०३३६३८८	१८.७८८८८८८	७.३१८६११
३९३	१८८८८८	६०६८८८५७	१८.८८८२७७६	७.३२८८२८
३९४	१८५२३६	६११६२८८८	१८.८८८८३३२	७.३३१०३७
३९५	१८६०२५	६१६२८८८८	१८.८८८८८८८	७.३३७२३८
३९६	१८६८८९	६२०८८८८८	१८.८८८८८८८	७.३३८८८८
३९७	१८७८८८	६२५७७७७३	१८.८८८८८८८	७.३४८८८८
३९८	१८८८८८	६३०८८८८८	१८.८८८८८८८	७.३५८८८८
३९९	१८८८८८	६३५२११८८	१८.८८८८८८८	७.३६८८८८
४००	१८००००	६४००००००	२०.००००००००	७.३६८८८८
४०१	१८०८८८	६४८८८८८८	२०.०८८८८८८	७.३७८८८८
४०२	१८१८८८	६५८८८८८८	२०.०८८८८८८	७.३८८८८८
४०३	१८२८८८	६६८८८८८८	२०.०८८८८८८	७.३९८८८८
४०४	१८३८८८	६७८८८८८८	२०.०८८८८८८	७.४०८८८८
४०५	१८४८८८	६८८८८८८८	२०.०८८८८८८	७.४१८८८८
४०६	१८५८८८	६९८८८८८८	२०.०८८८८८८	७.४२८८८८
४०७	१८६८८८	७०८८८८८८	२०.०८८८८८८	७.४३८८८८
४०८	१८७८८८	७१८८८८८८	२०.०८८८८८८	७.४४८८८८
४०९	१८८८८८	७२८८८८८८	२०.०८८८८८८	७.४५८८८८
४१०	१८९८८८	७३८८८८८८	२०.०८८८८८८	७.४६८८८८

(६७)

वर्ग, घन, आण मूळ.

संख्या.	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
१११	१६८२१	६१२६५३१	२०२७३१३२१	७०३२०६३
११२	१६८७४४	६९६३४५२८	२०२८७७८३१	७०४१०१८
११३	१७०५६८	७०४४४१७७	२०३२२४०१२	७०४७०३४
११४	१७१३८६	७०४४४१८७	२०३२६८८१८	७०४५३०४
११५	१७२३२५	७१४७३३७५	२०३७१५४८८	७०४५०३६
११६	१७३०५६	७१९८१२८६	२०३८६०७८१	७०४६०३३
११७	१७३८४९	७२५११७१३	२०४२०१७५८	७०४७०८८
११८	१७४७२४	७३०३४६३३	२०४४५०४८३	७०४८१६६
११९	१७५५६९	७३५६००५८	२०४६९८८५५	७०४९२०४
१२०	१७६४०७	७४०८८०००	२०४९३८०१५	७०५०८७३
१२१	१७७२४१	७४६१८४६१	२०५१८२८४५	७०५१४११
१२२	१७८०८४	७५१५१४४८	२०५४३६३८६	७०५०७४१
१२३	१७८९२८	७५६८६८६७	२०५६८६६३८	७०५०६६१
१२४	१७९७७६	७६२२५०२४	२०५९३२६०३	७०५१२५७
१२५	१८०६२५	७६७६५६२५	२०६१५२८१	७०५१८७३
१२६	१८१४७६	७७३०८७७६	२०६३९७६४४	७०५२३६५
१२७	१८२३२८	७७८५४४८३	२०६६३७७८३	७०५३०४८
१२८	१८३१८४	७८४०३७५२	२०६८८६०८६	७०५३६१३
१२९	१८४०४१	७८९५३५८९	२०७१३३१५३	७०५४१८६
१३०	१८४९००	७९५०७०००	२०७३८४४१४	७०५४७८२
१३१	१८५७६१	८००६२०८१	२०७६३५३८५	७०५५३६८
१३२	१८६६२४	८०६२१५६८	२०७८८६०१७	७०५५९७६
१३३	१८७४८९	८११८२७३७	२०८०८६५२०	७०५६५३५
१३४	१८८३५६	८१७४६५०४	२०८३२६६६७	७०५७११४
१३५	१८९२२५	८२३१२४७५	२०८५६६५३६	७०५७६८५
१३६	१९००९६	८२८८१८५६	२०८८०८६१३०	७०५८२७८
१३७	१९०९६९	८३४५३४६३	२०९०४५४५०	७०५८८४८
१३८	१९१८४४	८४०२७५५३	२०९२८४४५५	७०५९४६३
१३९	१९२७२१	८४६०४५९८	२०९५२३२६८	७०६००१८
१४०	१९३६००	८५१८४०००	२०९७६१७७७	७०६०६८५

वर्ग. घन. आधि. मूल.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूल	घनमूल
१०१	१०२०१	१०६१२०१	१०१	१०१
१०२	१०४०४	१०६४८०८	१०२	१०२
१०३	१०६०९	१०६९४०७	१०३	१०३
१०४	१०८१६	१०७४००८	१०४	१०४
१०५	११०२५	१०७८६१५	१०५	१०५
१०६	११२३६	१०८३२३६	१०६	१०६
१०७	११४४९	१०८७८६३	१०७	१०७
१०८	११६६४	१०९२५०४	१०८	१०८
१०९	११८८१	१०९७१५९	१०९	१०९
११०	१२१००	११०१८२०	११०	११०
१११	१२३२१	११०६४८१	१११	१११
११२	१२५४४	१११११५२	११२	११२
११३	१२७६९	१११५८९३	११३	११३
११४	१२९९६	११२०६३६	११४	११४
११५	१३२२५	११२५३८५	११५	११५
११६	१३४५६	११३०१३६	११६	११६
११७	१३६८९	११३४९१७	११७	११७
११८	१३९२४	११३९६८८	११८	११८
११९	१४१५९	११४४४६९	११९	११९
१२०	१४३९६	११४९२६०	१२०	१२०
१२१	१४६३६	११५४०६१	१२१	१२१
१२२	१४८७९	११५८८७२	१२२	१२२
१२३	१५१२५	११६३६८३	१२३	१२३
१२४	१५३६४	११६८५०४	१२४	१२४
१२५	१५६०९	११७३३२५	१२५	१२५
१२६	१५८५६	११७८१४६	१२६	१२६
१२७	१६१०९	११८२९६७	१२७	१२७
१२८	१६३५६	११८७७८८	१२८	१२८
१२९	१६६०९	११९२६०९	१२९	१२९
१३०	१६८५६	११९७४३०	१३०	१३०

चर्ग, यन, आणि मूळ.

संख्या	तारी	बन	गमसुख	गमसुख
२३१	२२१-२३	१०००-०३११	२१००-०३११	३०००-०३११
२३२	२२२-२४	१०००-०३१२	२१००-०३१२	३०००-०३१२
२३३	२२३-२५	१०००-०३१३	२१००-०३१३	३०००-०३१३
२३४	२२४-२६	१०००-०३१४	२१००-०३१४	३०००-०३१४
२३५	२२५-२७	१०००-०३१५	२१००-०३१५	३०००-०३१५
२३६	२२६-२८	१०००-०३१६	२१००-०३१६	३०००-०३१६
२३७	२२७-२९	१०००-०३१७	२१००-०३१७	३०००-०३१७
२३८	२२८-३०	१०००-०३१८	२१००-०३१८	३०००-०३१८
२३९	२२९-३१	१०००-०३१९	२१००-०३१९	३०००-०३१९
२४०	२३०-३२	१०००-०३२०	२१००-०३२०	३०००-०३२०
२४१	२३१-३३	१०००-०३२१	२१००-०३२१	३०००-०३२१
२४२	२३२-३४	१०००-०३२२	२१००-०३२२	३०००-०३२२
२४३	२३३-३५	१०००-०३२३	२१००-०३२३	३०००-०३२३
२४४	२३४-३६	१०००-०३२४	२१००-०३२४	३०००-०३२४
२४५	२३५-३७	१०००-०३२५	२१००-०३२५	३०००-०३२५
२४६	२३६-३८	१०००-०३२६	२१००-०३२६	३०००-०३२६
२४७	२३७-३९	१०००-०३२७	२१००-०३२७	३०००-०३२७
२४८	२३८-४०	१०००-०३२८	२१००-०३२८	३०००-०३२८
२४९	२३९-४१	१०००-०३२९	२१००-०३२९	३०००-०३२९
२५०	२४०-४२	१०००-०३३०	२१००-०३३०	३०००-०३३०

वर्ग, घन, आणि मूल.

संख्या.	वर्ग.	घन.	वर्गमूल.	घनमूल.
५०१	२५१००१	१२५७५१५०१	३२.३८३०२१३	७.०१२२१३
५०२	२५२००४	१२६५०६००८	३२.४०५३५६५	७.०१४५४४
५०३	२५३००९	१२७२६१५२७	३२.४२७६६९५	७.०१६८४८
५०४	२५४०१६	१२८०३४०६४	३२.४४९९८४३	७.०१९१४१
५०५	२५५०२५	१२८८१०७६५	३२.४७२२०५१	७.०२१३९४
५०६	२५६०३६	१२९५९४२१६	३२.४९४४२३८	७.०२३६४७
५०७	२५७०४९	१३०३८३८०३	३२.५१६६६०५	७.०२५८७३
५०८	२५८०६४	१३११८६५१२	३२.५३८८५५३	७.०२८११२
५०९	२५९०८१	१३१९८७२०२	३२.५६१००२३	७.०३०३४४
५१०	२६०१००	१३२६५१०००	३२.५८३१७१६	७.०३२५७०
५११	२६११२१	१३३४३२८३१	३२.६०५३०८१	७.०३४८०८
५१२	२६२१४४	१३४२१७७२८	३२.६२७४७७०	७.०३७०००
५१३	२६३१६९	१३५००५६९७	३२.६४९६५३३	७.०३९२०५
५१४	२६४१९६	१३५७९६७४४	३२.६७१८६०९	७.०४१४०३
५१५	२६५२२५	१३६५९०८७५	३२.६९४०७९४	७.०४३६०९
५१६	२६६२५६	१३७३८८०१६	३२.७१६२९३४	७.०४५८१६
५१७	२६७२८८	१३८१८८०७३	३२.७३८५१००	७.०४८०२५
५१८	२६८३२१	१३८९९१८३२	३२.७६०६९३४	७.०५०२२८
५१९	२६९३६१	१३९८०८३५९	३२.७८२८७७५	७.०५२४३३
५२०	२७०४००	१४०६२००००	३२.८०५०६०५	७.०५४६४१
५२१	२७१४४१	१४१४३०७६१	३२.८२७२४२४	७.०५६८५३
५२२	२७२४८४	१४२२४१६४८	३२.८४९४२९३	७.०५९०६८
५२३	२७३५२९	१४३०५२६६७	३२.८७१६१६३	७.०६१२८६
५२४	२७४५७६	१४३८६३७८४	३२.८९३८०६३	७.०६३५०८
५२५	२७५६२५	१४४६७४९२५	३२.९१६०००५	७.०६५७२३
५२६	२७६६७६	१४५४८६१०६	३२.९३८१८८८	७.०६७९४६
५२७	२७७७२९	१४६२९७३१८	३२.९६०३८०६	७.०७०१७४
५२८	२७८७८४	१४७१०८५५३	३२.९८२५७०६	७.०७२४००
५२९	२७९८४१	१४७९२०८८८	३३.००४७६००	७.०७४६२८
५३०	२८०८९६	१४८७३२०००	३३.०२६९५२८	७.०७६८५३

वर्ग, पन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	पन.	वर्गमूळ.	पनमूळ.
५३१	२०११६१	१५०७२१२१	२३.०५३३३७२	८.०१७७५९
५३२	२०३०२५	१५०५६७७६८	२३.०६५१२५२	८.१०२८३९
५३३	२०४०८०	१५१४१८४३०	२३.०८६७१२८	८.१०७९१३
५३४	२०५१५६	१५२२७३३०५	२३.१०८४४००	८.११२८८५
५३५	२०६२१५	१५३१३०३७५	२३.१३००६७०	८.११८००१
५३६	२०७२९६	१५३९९०६५६	२३.१५१६७३८	८.१२३०९६
५३७	२०८३६८	१५४८५४१५१	२३.१७३२६०५	८.१२८१४५
५३८	२०९४४५	१५५७२०८७२	२३.१९४८३७१	८.१३३१८७
५३९	२१०५२१	१५६५९०७१	२३.२१६३७३५	८.१३८२२३
५४०	२११६००	१५७४६००००	२३.२३७९००१	८.१४३२५३
५४१	२१२६८१	१५८३४०४२१	२३.२५९४०६७	८.१४८३७६
५४२	२१३७६४	१५९२२००८८	२३.२८०८१३५	८.१५३३९८
५४३	२१४८४५	१६०१००३०००	२३.३०२३६०४	८.१५८३०५
५४४	२१५९३६	१६०९८१९८४	२३.३२३८०७६	८.१६३३१०
५४५	२१७०२५	१६१८७८६२१	२३.३४५२३५१	८.१६८३०६
५४६	२१८११६	१६२७७१३३६	२३.३६६६८४२९	८.१७३३०३
५४७	२१९२०८	१६३६६७३३३	२३.३८८०३११	८.१७८३०९
५४८	२२०३०४	१६४५६६५१२	२३.४०९३९९८	८.१८३३६८
५४९	२२१४०१	१६५४६०१०८	२३.४३०७४९०	८.१८८३४४
५५०	२२२५००	१६६३७००००	२३.४५२०७८८	८.१९३३१३
५५१	२२३६०१	१६७२८०१५१	२३.४७३३८६२	८.१९८३७५
५५२	२२४७०४	१६८१९६६०८	२३.४९४६८०३	८.२०३३३२
५५३	२२५८०९	१६९११३३७	२३.५१५९५२०	८.२०८३८३
५५४	२२६९१६	१७००३१४६४	२३.५३७२०४६	८.२१३३०३
५५५	२२८०२५	१७०९५३८७५	२३.५५८४३८०	८.२१८३६६
५५६	२२९१३६	१७१८७५६६१	२३.५७९६५२३	८.२२३३८०
५५७	२३०२४९	१७२८०७६९३	२३.६००८४७४	८.२२८३८०
५५८	२३१३६४	१७३७४११११	२३.६२२००३६	८.२३३३८९
५५९	२३२४८१	१७४६७४६८७	२३.६४३१८०८	८.२३८३६९
५६०	२३३६००	१७५६१६०००	२३.६६४३१११	८.२४३३७०

वर्ग, पन, आणि मूळ

संख्या	वर्ग	पन	वर्गमूळ	पनमूळ
१६१	३१००३५	१७ ६५ ५००००१	२३ ६० ५० ३०६	० २० ७०००
१६२	३१००००	१७ ७५ ०० ३१०	२३ ७० ६५ ३०३	० २५ ३३७९
१६३	३१००००	१७ ८० ०३ ५००	२३ ७० ७६ २१०	० २५ ०३६१
१६४	३१००००	१७ ८० ०६ १००	२३ ७० ८६ ००२	० २६ २१००
१६५	३१००००	१८ ०३ ६२ १०५	२३ ७६ ०३ २०६	० २६ ००००
१६६	३१००००	१८ १३ २१ ००६	२३ ७६ ०७ ५०५	० २७ १०००
१६७	३१००००	१८ २२ ०० २६३	२३ ८१ १७ ६१८	० २७ ६००३
१६८	३१००००	१८ ३२ ५० ०३२	२३ ८३ २७ ५०६	० २८ १६३५
१६९	३१००००	१८ ४० ०० ०००	२३ ८५ ३७ २००	० २८ ६००३
१७०	३१००००	१८ ५१ ३० ०००	२३ ८७ ४६ ७०८	० २८ १३००
१७१	३१००००	१८ ६१ ६० ०११	२३ ८९ ५६ ०६३	० २८ ६१००
१७२	३१००००	१८ ७१ ९० ०२०	२३ ९१ ६६ २१५	० २९ १०००
१७३	३१००००	१८ ८१ ३२ ५१७	२३ ९३ ७० १००	० ३० १०६५
१७४	३१००००	१८ ९१ १० २१०	२३ ९५ ८० २०१	० ३१ १०६०
१७५	३१००००	१९ ०० १० ३०५	२३ ९७ ९१ ५०६	० ३१ ५५१७
१७६	३१००००	१९ ११ ० ३०६	२४ ०० ०० ०००	० ३२ ०३३५
१७७	३१००००	१९ २१ ०० ०३३	२४ ०२ ०० २०३	० ३२ ५१०१
१७८	३१००००	१९ ३१ ०० ५५३	२४ ०४ १० ३०६	० ३२ १०५०
१७९	३१००००	१९ ४१ ०० ५३०	२४ ०६ २० १०८	० ३३ ००५५
१८०	३१००००	१९ ५१ १२ ०००	२४ ०८ ३० १०१	० ३३ १०५१
१८१	३१००००	१९ ६१ २२ ००१	२४ १० ४० १०६	० ३४ ०३०१
१८२	३१००००	१९ ७१ ३० ३०६	२४ १२ ५० ३०३	० ३४ ०१०६
१८३	३१००००	१९ ८१ ५० ५०७	२४ १५ ०२ १०१	० ३५ १००५
१८४	३१००००	१९ ९१ ७० ६००	२४ १६ १० २११	० ३५ ०६०८
१८५	३१००००	२० ०२ ०३ ६२५	२४ १८ २० ३०३	० ३६ ०३०६
१८६	३१००००	२० १२ ३० ०५६	२४ २० ३० ३०६	० ३६ ०२०६
१८७	३१००००	२० २२ ६० २००३	२४ २२ ४० ०२०	० ३७ ०२०७
१८८	३१००००	२० ३२ ९० ३००३	२४ २४ ५० ११३	० ३७ ०७ १०
१८९	३१००००	२० ४३ ३० ६०६	२४ २६ ६० २२३	० ३८ ०२ ०५
१९०	३१००००	२० ५३ ७० ०००	२४ २८ ७० ३५६	० ३८ ०७ २०६

वर्ग, घन, आणिसूच.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गसूच.	घनसूच.
५९१	३४१२९	२०६२५०७१	२०३१००९१६	८३९१९२
५९२	३४०५६४	२०७०७०६८८	२०३३१०१५१	८३९६७३
५९३	३४१६०८	२०८५२७८५७	२०३५१५९१३	८४०१३९८
५९४	३४२८३६	२०९५८४५८४	२०३७२७१५२	८४०६११८
५९५	३४००३५	२१०६४०८७५	२०३९३६२१८	८४१०८३३
५९६	३४५२१६	२११७०८७३६	२०४१३१११३	८४१५५५२
५९७	३४६४०८	२१२७७६९७३	२०४३३५८३०	८४२०२७६
५९८	३४७६०४	२१३८४७१९२	२०४५४०३८५	८४२५०००
५९९	३४८८०१	२१४९२१७९९	२०४७४५७६५	८४२९६३८
६००	३६००००	२१६००००००	२०४९५०८७४	८४३४३३४
६०१	३६१२०१	२१७०८१८०१	२०५१५३०१३	८४३९०१०
६०२	३६२४०४	२१८१६७२०८	२०५३५६८८३	८४४३६८८
६०३	३६३६०५	२१९२५६३२७	२०५५६०५८३	८४४८३६०
६०४	३६४८१६	२२०३४८८६४	२०५७६४११५	८४५३०२८
६०५	३६६०३५	२२१४४५१३५	२०५९६७४७८	८४५७६९१
६०६	३६७२३६	२२२५४५०१६	२०६१७०६७३	८४६२३४८
६०७	३६८४४८	२२३६४८५४३	२०६३७३७००	८४६७०००
६०८	३६९६६०	२२४७५१७७२	२०६५७६५६०	८४७१६७७
६०९	३७०८८१	२२५८६६५२९	२०६७७९२५४	८४७६३८८
६१०	३७२१००	२२६९८१०००	२०६९८१७८१	८४८१०९२४
६११	३७३३२१	२२८०८९३३१	२०७१८५१५२	८४८५७९१८
६१२	३७४५४४	२२९२००८२८	२०७३८८३३८	८४९०४८५
६१३	३७५७६६	२३०३१६३९७	२०७५९१८३६८	८४९५१८८
६१४	३७६९८८	२३१४३५५५४	२०७७९८०२२४	८४९९८८३
६१५	३७८२१५	२३२५६०८७५	२०७९९९८३५	८५०४५८५
६१६	३७९४३६	२३३६८०८८८	२०८१९३४७३	८५०९२८२
६१७	३८०६८८	२३४८०५१११	२०८३९८०७७	८५१३९८३
६१८	३८१९२४	२३५९२९०३२	२०८५९८०५८	८५१८७८०
६१९	३८३१८१	२३७०५६६५६	२०८७९७१८६	८५२३४८३
६२०	३८४४००	२३८१८८०००	२०८९९७१८२	८५२८१९५

वर्ग, घन, आणि मूल.

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूल	घनमूल
६२१	३८५६८१	२३१८८३०६९	२४०११८७१६	८५२१६०३
६२२	३८६८८८	२८०६८१८८	२४०१३६०३०	८५२६१७१
६२३	३८८१२८	२८१८००३६०	२४०१५१६७०	८५३०४५५
६२४	३८९३७६	२८२९१०६८८	२४०१६६८२०	८५३५३१०
६२५	३९०६२५	२८४०२०६२५	२४०१८१९०००	८५४०१७९
६२६	३९१८७६	२८५१३०७०६	२४०१९७१२०	८५४५०३७
६२७	३९३१२८	२८६२४०८८३	२४०२१२६८१	८५४९८९०
६२८	३९४३८०	२८७३५१०६०	२४०२२८१२८२	८५५४७३८
६२९	३९५६३१	२८८४६१२४८	२४०२४३६४२४	८५५९६०१
६३०	३९६८८३	२८९५७१४३०	२४०२५९१००८	८५६४४६६
६३१	३९८१३५	२९०६८१६१९	२४०२७४५७२४	८५६९३१२
६३२	३९९३८८	२९१७९१८०८	२४०२९००४०२	८५७४१६९
६३३	४००६४०	२९२९०२००००	२४०३०५५११३	८५७९०२५
६३४	४०१८९६	२९४०१२१००८	२४०३२०९८६६	८५८३८८४
६३५	४०३१५२	२९५१२२२०००	२४०३३६४६३	८५८८७३८
६३६	४०४४०८	२९६२३२३००८	२४०३५१९६०४	८५९३६०४
६३७	४०५६६४	२९७३४२४००३	२४०३६७४६०८	८५९८४५२
६३८	४०६९२०	२९८४५२५००२	२४०३८२९६६१९	८६०३२५३
६३९	४०८१७६	२९९५६२६००८	२४०३९८४७७३	८६०८०८०
६४०	४०९४३२	३००६७२७०००	२४०४१४०८८३	८६१२८८८
६४१	४१०६८८	३०१७८२८००८	२४०४२९६००८	८६१७७३९
६४२	४११९४४	३०२८९२९००८	२४०४४५११०८	८६२२६०६
६४३	४१३२००	३०४००३००००	२४०४६०६२००	८६२७४०३
६४४	४१४४५६	३०५११३१००८	२४०४७६१३५१	८६३२२५५
६४५	४१५७१२	३०६२२३२०००	२४०४९१६६०२	८६३७०२३
६४६	४१६९६८	३०७३३३३०००८	२४०५०७१८०९	८६४१८८५
६४७	४१८२२४	३०८४४३४००००	२४०५२२६९००	८६४६७४४
६४८	४१९४८०	३०९५५३५०००८	२४०५३८२०००९	८६५१६३७
६४९	४२०७३६	३१०६६३६००००	२४०५५३७०००८	८६५६५३६
६५०	४२१९९२	३११७७३७०००८	२४०५६९२०००८	८६६१४०९

वर्ग, पन, आणि मूल.

संख्या.	वर्ग.	पन.	वर्गमूल	पनमूल
६५१	२३८०१	२७५८५५५१	२५५१५७०१६	८६६८३१
६५२	२३५१०५	२७७१६७००	२५५३५२१०७	८६७१२६६
६५३	२३६५०६	२७८५५५०५	२५५५५३८६५७	८६७५६१७
६५४	२३७७१६	२७९७२६२६	२५५७३५२३७	८६८०१३५
६५५	२३९०२५	२८१०११३७	२५५९३८६७८	८६८५५५६
६५६	२३०३३६	२८२३००५१६	२५६१२५१६९	८६९०८६३
६५७	२३१६५६	२८३५९३३६३	२५६३२०११२	८६९६३७६
६५८	२३२९६५	२८४८८०३१३	२५६५१६१०७	८७०१७८५
६५९	२३४२८१	२८६१७११७०	२५६७०८१५३	८७०७१८८
६६०	२३५६००	२८७४६२०००	२५६९००६५२	८७०८६५७७
६६१	२३६९२१	२८८७५३०८१	२५७०९२२०३	८७१००८३
६६२	२३८२४५	२८९१७५२८	२५७२८३६१७	८७११५३३
६६३	२३९५६९	२९०५०२२५	२५७४७५०६८	८७१३०५१
६६४	२४०८८६	२९१८३५२५	२५७६६६९७५	८७१४५४१
६६५	२४२२२५	२९३१७०६३५	२५७८५७५३१	८७१६०९८
६६६	२४३५५६	२९४५०८३६६	२५८०४८७५८	८७१७६५७
६६७	२४४८८९	२९५८४०६६३	२५८२४०३११	८७१९२६९
६६८	२४६२३१	२९७१७२६३३	२५८४३१६९०	८७२०८३५
६६९	२४७५६३	२९८५०४३०९	२५८६२३३३३	८७२२४०८५
६७०	२४८८९०	२९९८३६३००	२५८८१५०६२	८७२३९७०
६७१	२५०२२१	३०११६८३११	२५९००६६७७	८७२५५६९१
६७२	२५१५५५	३०२५००५५८	२५९१९८३६८८	८७२७१३८८
६७३	२५२८८९	३०३८३२९९७	२५९३९००३५	८७२८७०८१
६७४	२५४२३६	३०५१६५५२५	२५९५८१६९०	८७३०२७९८
६७५	२५५५६५	३०६५००००५	२५९७७३३६३१	८७३१८०५३
६७६	२५६९०६	३०७८३५०३६	२६०००५००००	८७३३३८३३
६७७	२५८२४२	३०९१७००७३	२६०१९६२३३७	८७३४९०८८
६७८	२५९५८५	३१०५०५५५३	२६०३८७३३३१	८७३६५०९८
६७९	२६०९२९	३११८४००८९	२६०५७८४३८५	८७३८०३५६
६८०	२६२२७०	३१३१७५०००	२६०७७०००६६	८७३९५६५८

वर्ग, यन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	यन.	वर्गमूळ	यनमूळ.
६८१	४६३७६१	३१५८३१२५१	२६०१५१७६७	८०७९७९६८
६८२	४६५१२४	३१७२१४६८	२६०१११३५७	८०८२२७३
६८३	४६६५८९	३१८६११८७७	२६०१३४६८७	८०८६५७३
६८४	४६७८५६	३२००१३५४	२६०१५३३३७	८०८९८६८
६८५	४६९२२५	३२१४१८१२५	२६०१७२५०४७	८०९१५९६०
६८६	४७०५९६	३२२८२८८५६	२६०१९१६०१७	८०९१९४४७
६८७	४७१९६९	३२४२४००३	२६०२१०६८८	८०९२३७३१
६८८	४७३३४४	३२५६६०६७३	२६०२२९७५५	८०९२८००२
६८९	४७४७२१	३२७०८२७६८	२६०२४८८०१५	८०९३२२५५
६९०	४७६१००	३२८५०८०००	२६०२६७८५११	८०९३६५५६
६९१	४७७४८१	३२९९३८३७१	२६०२८६८८८९	८०९४०८२३
६९२	४७८८६४	३३१३७३८८८	२६०३०५८१२३	८०९४५०८५
६९३	४८०२४९	३३२८१२५५७	२६०३२४८८३३	८०९४९३४४
६९४	४८१६३६	३३४२५५३८४	२६०३४३८७१७	८०९५३५९८
६९५	४८३०२५	३३५७०२३७५	२६०३६२८५२७	८०९५७८४९
६९६	४८४४१६	३३७१५३५३६	२६०३८१८११९	८०९६२०९५
६९७	४८५८०८	३३८६०८०३	२६०४००७५७६	८०९६६३३७
६९८	४८७२०४	३४००६८३८३	२६०४१९६८८६	८०९७०५७६
६९९	४८८६०१	३४१५३३०८९	२६०४३८६०८१	८०९७४८१०
७००	४९००००	३४३००००००	२६०४५७५१३१	८०९७९०४०
७०१	४९१४०१	३४४४४०२१०१	२६०४७६४०४६	८०९८३२६६
७०२	४९२८०४	३४५८८०८८८	२६०४९५२८२६	८०९८७४८८
७०३	४९४२०९	३४७४२०८३७	२६०५१४१४७३	८०९९१७०६
७०४	४९५६१६	३४८९६१६६८	२६०५३३०१८८	८०९९५९२०
७०५	४९७०२५	३५०५०२६३५	२६०५५१९३६१	८०९९९१३०
७०६	४९८४३६	३५१८८५८०१६	२६०५७०६६०५	८०९९३३६६
७०७	४९९८४९	३५३३८३३३३३	२६०५८९४७१६	८०९९८५३८
७०८	५०१२६४	३५४८८१४१३	२६०६०८२६८४	८१००२७७७
७०९	५०२६८१	३५६४००८२८	२६०६२७०५३९	८१००६९३१
७१०	५०४१००	३५७९११०००	२६०६४५८५५३	८१०११२१

वर्ग, पन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	पन.	वर्गमूळ.	पनमूळ.
७११	५०५५३१	३५१४३५३३	३६.६६५५३३	८.१२५१०८
७१२	५०६६४२	३६०१४४१२८	३६.६८३३५१	८.१२५४००
७१३	५०७७६६	३६९२६७०५	३६.७०२०५५०	८.१३३६६८
७१४	५०८७१६	३६९६१४३७	३६.७२०७७०४	८.१३७८४३
७१५	५१११३१	३६९९२५०७	३६.७३१४८३१	८.१४२०१४
७१६	५१२६३६	३७००६१६५	३६.७४८५७६३	८.१४६१८१
७१७	५१४०८६	३७०६०१०५	३६.७७६८५५७	८.१५०३४४
७१८	५१५५३४	३७०९४३३३	३६.७९५५६३०	८.१५४५०३
७१९	५१६९६१	३७१६४१५५	३६.८१४७७५४	८.१५८६५०
७२०	५१८४००	३७३३४०००	३६.८३३८१५७	८.१६२८०६
७२१	५१९८०१	३७४०८५३७	३६.८५१४४३३	८.१६६९५७
७२२	५२१२०४	३७६३६७०४	३६.८७००५७७	८.१७११०१
७२३	५२२७३६	३७७६३७०७	३६.८८८६५१३	८.१७५२४०
७२४	५२४१७६	३७८५०३४४	३६.९०७३४८१	८.१७९३७६
७२५	५२५६३५	३८१०८१२५	३६.९२५८३४०	८.१८३५१६
७२६	५२७१७६	३८२६५७१७	३६.९४४३८७३	८.१८७६३७
७२७	५२८६३१	३८३३४०६३	३६.९६३३७५५	८.१९१७६३
७२८	५२९८८४	३८५८३८३५३	३६.९८१४७५१	८.१९५८८३
७२९	५३१४४१	३८७४२०४८६	३७.०००००००	८.००००००
७३०	५३२९००	३८९०१७०००	३७.०१८५१२३	८.००४११३
७३१	५३४३६१	३९०६१७८८१	३७.०३७०११७	८.००८२२३
७३२	५३५८२४	३९२३२३१६८	३७.०५५५१८५	८.०१२३२८
७३३	५३७२८६	३९३८३३८३७	३७.०७३९७३०	८.०१६४३१
७३४	५३८७५६	३९५४४६१०४	३७.०९२४३४४	८.०२०५२८
७३५	५४०२२५	३९७०६५३७५	३७.११०८८३४	८.०२४६३४
७३६	५४१६९६	३९८६८८२५६	३७.१२९३१८८	८.०२८७५५
७३७	५४३१६६	४००३१५५५३	३७.१४७७४३६	८.०३२८०३
७३८	५४४६४४	४०१९४७७३२	३७.१६६१५५४	८.०३६८८६
७३९	५४६१२१	४०३५८३४१९	३७.१८४५५४४	८.०४०९६५
७४०	५४७६००	४०५२२४०००	३७.२०३९११०	८.०४५००१

वर्ग, धन, आणि मूल.

संख्या	वर्ग.	धन.	वर्गमूल.	धनमूल.
७४१	५५१०८१	५०६०२१	२७.२२१३१५२	१.०५२११५
७४२	५५०५८५	५०५५१०५	२७.२३१६५६१	१.०५३१०३
७४३	५५२००१	५१०१७२००१	२७.२५००२६३	१.०५४२५०
७४४	५५३५३६	५११०३०७०५	२७.२७६३६३५	१.०६१३१०
७४५	५५५०२५	५१३५१३६३५	२७.२९५६८०१	१.०६५२६७
७४६	५५६५१६	५१५५६०१३६	२७.३१३०००६	१.०६९५२२
७४७	५५८००८	५१६८३२७३३	२७.३३१३००७	१.०७३५७३
७४८	५५९५०५	५१८५१०८१३	२७.३५१५८८७	१.०७७५२०
७४९	५६१००१	५२०१८१७५०	२७.३६७०८५५	१.०८१५६३
७५०	५६२५००	५२१८७५०००	२७.३८६१२७०	१.०८५६०३
७५१	५६४००१	५२३५६५७५१	२७.४०५३७१२	१.०८९६३१
७५२	५६५५०५	५२५२५६००५	२७.४२२६१०५	१.०९३६६२
७५३	५६७००८	५२६९५७७७८	२७.४४०८५५५	१.०९७७७१
७५४	५६८५१६	५२८६६१०६६	२७.४५९०६०५	१.१०१७२६
७५५	५७००२५	५३०३६८८०५	२७.४७७२६६३	१.१०५७५०
७५६	५७१५३६	५३२०८१२१६	२७.४९५५५५२	१.१०९७६६
७५७	५७३००१	५३३७८००१३	२७.५१३६६३०	१.११३७८१
७५८	५७४५६५	५३५५११५१२	२७.५३१७८१८	१.११७७७१
७५९	५७६००१	५३७२५५७०८	२७.५४९९५५६	१.१२१८०१
७६०	५७७५००	५३८९७६०००	२७.५६८०८७५	१.१२५८०५
७६१	५७९०२१	५४०७११००१	२७.५८६२२८५	१.१२९८०६
७६२	५८०५०५	५४२४५०७२०	२७.६०४३७७५	१.१३३८०३
७६३	५८२०६९	५४४१९०८०७	२७.६२२५५६६	१.१३७७९७
७६४	५८३६१६	५४५९३०३०५	२७.६४०६५९९	१.१४१७८८
७६५	५८५१२५	५४७६६१७१२	२७.६५८६३३३	१.१४५७७५
७६६	५८६६५६	५४९४०५०६६	२७.६७६७०५०	१.१४९७५७
७६७	५८८२०१	५५११३१७६३	२७.६९४७८५८	१.१५३७३७
७६८	५८९८२५	५५२८८०७१३	२७.७१२८१२५	१.१५७७१५
७६९	५९१३६१	५५४६३६६०१	२७.७३०८०९२	१.१६१६८६
७७०	५९२९००	५५६३७३०००	२७.७४८८०३९	१.१६५६५६

(७१)

वर्ग. पन. आणिमूळ.

संख्या.	वर्ग.	पन	वर्गमूळ.	पनमूळ.
७७१	५८४४५१	५८३१००१	२७.७६६८८६८	६.१६६६२३
७७२	५८५५८५	५८००१६८८	२७.७८८८८८०	६.१७३५८५
७७३	५८७५३८	५८१८८८११	२७.८०२८७७५	६.१७७५५५
७७४	५८८७७६	५८३६८८८२५	२७.८२०८५५५	६.१८१५००
७७५	६००६३५	५८५५८८३७५	२७.८३८८२१८	६.१८५५१३
७७६	६०२१७६	५८७२८८५७६	२७.८५६७७६६	६.१८८५०२
७७७	६०३७२५	५८९०९७७३३	२७.८७२६५१५	६.१९७२८८
७७८	६०५२८५	५९०७२११३८	२७.८९०५७१५	६.२०१२३६
७७९	६०६८८१	५९२४२०१३८	२७.९०८५७१५	६.२०१२३६
७८०	६०८८००	५९४५५२००	२७.९२६८८०९	६.२०५३६५
७८१	६०९९६३	५९६३७५५७१	२७.९४६३७३२	६.२०९०९६
७८२	६११५३५	५९८१११६८	२७.९६४२६२५	६.२१३०२५
७८३	६१३०८६	५९९८६८८	२७.९८३३३७३	६.२१६१५०
७८४	६१४६५६	६०१८०३५५	२८.०००००००	६.२२०८७३
७८५	६१६२२५	६०३७३६६३५	२८.०१७८८१५	६.२२५७१९
७८६	६१७७७६	६०५५८७७६६	२८.०३६६८१६	६.२२८७०७
७८७	६१९३६६	६०७४४३७७	२८.०५३५२०३	६.२३२६९६
७८८	६२०९५५	६०९३०३८७२	२८.०७१३३७७	६.२३७५२८
७८९	६२२५२१	६१११६१८६	२८.०८९१४३८	६.२४०५३२५
७९०	६२४१००	६१३०३८०००	२८.१०६१३८६	६.२४५३३५
७९१	६२५६८९	६१४९३६७१	२८.१२४७२३३	६.२४८२३५
७९२	६२७२६०	६१६८३००००	२८.१४२४१८६	६.२५२१३०
७९३	६२८८४९	६१८६७७७७	२८.१६०३५७७	६.२५६०२३
७९४	६३०४३६	६२०५६६९८	२८.१७८००१६	६.२६०१११
७९५	६३२०२५	६२२४५८००	२८.१९५७७७५	६.२६३७५०
७९६	६३३६१६	६२४३५८३३६	२८.२१३४७२०	६.२६७६८०
७९७	६३५२०८	६२६२६९५७३	२८.२३११८०५	६.२७१११६
७९८	६३६८०५	६२८१६५६३	२८.२४८८८३८	६.२७५५३५
७९९	६३८४०१	६२९०८२३१६	२८.२६६५८०१	६.२७९३०८
८००	६४००००	६३१००००००	२८.२८४३७१३	६.२८३१७८

वर्ग, घन, आणि मूल.

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूल	घनमूल
८०१	६४१६०१	५३३६३६०१	२८३०११३००	१०२०४०००
८०२	६४३६०४	५३५८०६६०	२८३११६००५	१०३०००००
८०३	६४५६०९	५३७९७७७७	२८३२१९००६	१०३०००००
८०४	६४७६१६	५३९१४८८८	२८३३२००१०	१०३०००००
८०५	६४९६२५	५४०३२०००	२८३४२००१५	१०३०००००
८०६	६५१६३६	५४१४९१११	२८३५२००२०	१०३०००००
८०७	६५३६४९	५४२६६२२२	२८३६२००२५	१०३०००००
८०८	६५५६६४	५४३८३३३३	२८३७२००३०	१०३०००००
८०९	६५७६७९	५४५००४४४	२८३८२००३५	१०३०००००
८१०	६५९६९६	५४६१७५५५	२८३९२००४०	१०३०००००
८११	६६१७०९	५४७३४६६६	२८४०२००४५	१०३०००००
८१२	६६३७२४	५४८५१७७७	२८४१२००४९	१०३०००००
८१३	६६५७३९	५४९६८८८८	२८४२२००५०	१०३०००००
८१४	६६७७५६	५५०८६०००	२८४३२००५५	१०३०००००
८१५	६६९७७९	५५२०३१११	२८४४२००६०	१०३०००००
८१६	६७१७९६	५५३२०२२२	२८४५२००६५	१०३०००००
८१७	६७३८१९	५५४३७३३३	२८४६२००७०	१०३०००००
८१८	६७५८४९	५५५५४४४४	२८४७२००७५	१०३०००००
८१९	६७७८७९	५५६७१५५५	२८४८२००८०	१०३०००००
८२०	६७९९०९	५५७८८६६६	२८४९२००८५	१०३०००००
८२१	६८१९३९	५५९०५७७७	२८५०२००९०	१०३०००००
८२२	६८३९६९	५६०२२८८८	२८५१२००९५	१०३०००००
८२३	६८५९९९	५६१४००००	२८५२२००९९	१०३०००००
८२४	६८८०२९	५६२५७१११	२८५३२०१००	१०३०००००
८२५	६९००५९	५६३७४२२२	२८५४२०१०५	१०३०००००
८२६	६९२०८९	५६४९१३३३	२८५५२०११०	१०३०००००
८२७	६९४११९	५६६०८४४४	२८५६२०११५	१०३०००००
८२८	६९६१४९	५६७२५५५५	२८५७२०१२०	१०३०००००
८२९	६९८१७९	५६८४२६६६	२८५८२०१२५	१०३०००००
८३०	६९९२०९	५६९५९७७७	२८५९२०१३०	१०३०००००

वर्ग. पन. आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	पन.	वर्गमूळ.	पनमूळ.
८३१	६०५६१	५७३८५६१८१	२८०८२७७७०६	६०५५५६१
८३२	६०२२२८	५७५८३०३६८	२८०८५५५१०२	६०५५३३८
८३३	६०३८८१	५७६००८५३७	२८०८६१७३८५	६०५५१०५
८३४	६०५५५६	५८००९३७०५	२८०८७१०५८३	६०५५२८६०
८३५	६०७२२५	५८२१८२८७५	२८०८८६३६६६	६०५५६६३०
८३६	६०८८८६	५८४२७७७५६	२८०८९३६६५६	६०५२०३८७
८३७	७००५६८	५८६३७६२५३	२८०९०५५२३	६०५२५१२३
८३८	७०२२८५	५८८४८००७३	२८०९१८२२८७	६०५२७८८५
८३९	७०३८२१	५८०५८१७१९	२८०९५५८६७	६०५३१६५५
८४०	७०५६००	५८२७०४०००	२८०९८२७५३५	६०५३५३८८
८४१	७०७२८१	५८४८२३३२१	२८०९९००१००	६०५३८१३१
८४२	७०८८६५	५८६९४७६८८	२८१०१७३६६३	६०५३८७५५
८४३	७१०६४१	५८८०७७१०७	२८१०३४४६२३	६०५४६६००
८४४	७१२३३६	६०१२११५८५	२८१०५१६७८१	६०५५०३४१
८४५	७१४०२५	६०३३५११५५	२८१०६८८८३७	६०५५५०३२
८४६	७१६७१६	६०५४८५७३६	२८१०८६०७११	६०५६००००
८४७	७१७४०८	६०७६४५४२३	२८११०३२६४५	६०५६५५२५
८४८	७१९१०५	६०९८००१८३	२८११२००३८६	६०५६८१०७
८४९	७२०८०१	६११८६००५८	२८११३७६०४६	६०५६८५६६
८५०	७२५५००	६१४१२५०००	२८११५४७५८५	६०५७२६८५
८५१	७२४२०१	६१६२८५०५१	२८११७१८००३	६०५७६३६५
८५२	७२५८०५	६१८४७०२०८	२८११८९०३८०	६०५८०१०६
८५३	७२७६०८	६२०६५०७०३	२८१२०६१६३७	६०५८३८१३
८५४	७२९३१६	६२२८३५८६५	२८१२२३३७८५	६०५८७५१८
८५५	७३१०२५	६२५०२६३७०	२८१२४०३८३०	६०५९११२०
८५६	७३२७३६	६२७२२२०१६	२८१२५७५७७३	६०५९४७१८
८५७	७३४४४५	६२९४३२६०३	२८१२७४५६२३	६०५९८३१८
८५८	७३६१६८	६३१६२८७१३	२८१२९१६३७०	६०६०२३०८
८५९	७३७८८१	६३३८३८७७०	२८१३०८७०१८	६०६०५८८५
८६०	७३९६००	६३६०५६०००	२८१३२५७५६६	६०६०९६८५
८६१	१३२१	६३८२७७३८१	२८१३४२८०१५	६०६१३३१०
८६२	७४३४४५	६४०५०३८२८	२८१३५९८३६५	६०६१७७५५
८६३	७४४७६०	६४२७३५६४५	२८१३७६८६१६	६०६२०३१०
८६४	७४६४८६	६४४९७२५४५	२८१३९३८७६८	६०६२४४०५

वर्ग, पन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग	पन	वर्गमूळ	पनमूळ
८६५	७८८२३५	६८७२१८३२५	२१०८३०८३३	१०९२८५५२
८६६	७८८१५६	६८८८६१८३	२१०८३०८३३	१०९३१५५२
८६७	७८८१६८	६८९७१८३३	२१०८३०८३३	१०९३५५५७
८६८	७८८३८२५	६८९८७२०३३	२१०८३१०३३७	१०९३८१०३
८६९	७८८५१६१	६८९९३८०००	२१०८३०८५२	१०९४२७५८
८७०	७८८६०००	६८९९०३०००	२१०८३५७६५८	१०९४६००३
८७१	७८८६५१	६९००७६३११	२१०८३५७०५१	१०९५०५०५
८७२	७८८७०८	६९३०५८०८०	२१०८३५६८६१	१०९५३७५१
८७३	७८८९३८	६९३३३८६१७	२१०८३५६७३८	१०९५७३६१
८७४	७८९०७६	६९७६२७६२८	२१०८६३८११०	१०९६३०५१
८७५	७८९१६३१	६९८८२१८७५	२१०८६०३८८८	१०९६८६६६
८७६	७८९३७६	६९९२२१३७६	२१०८६७२८७२	१०९६८२८८
८७७	७८९१२८	६९९५३६१३३	२१०८६१८५८	१०९७१८३८
८७८	७८९०८८८	६९९८३६१५२	२१०८६३१६८	१०९७५५७८
८७९	७८९३६१	६९९९५१३८	२१०८६७३२५	१०९७९८८
८८०	७८९४०००	६९९९८००००	२१०८६८०८३८	१०९८३८०८
८८१	७८९१६१	६९९९८०८०८	२१०८६९८८३३	१०९८८८८८
८८२	७८९१३८	६९९९९८०८८	२१०८६९८८८८	१०९९०८८८
८८३	७८९६८८	६९९९९९९८८	२१०८७१९९९८	१०९९३७९८
८८४	७८९४६६	६९९९९९९९८	२१०८७२१९९८	१०९९७९९८
८८५	७८९३३३६	६९९९९९९९९	२१०८७२१९९८	१०९९९९९८
८८६	७८९५६६	६९९९९९९९९	२१०८७५७९९९	१०९९९९९८
८८७	७८९७६६	६९९९९९९९९	२१०८७५७९९९	१०९९९९९८
८८८	७८९९९९	७०००२७७७७	२१०८७९९९९८	१०९९९९९८
८८९	७९०३३९	७००१९९९९८	२१०८७९९९९८	१०९९९९९८
८९०	७९११००	७००१९९९९९	२१०८७९९९९८	१०९९९९९८
८९१	७९३८८९	७००३९९९९९	२१०८७९९९९८	१०९९९९९८
८९२	७९५६६८	७००५९९९९८	२१०८७९९९९८	१०९९९९९८
८९३	७९७४४७	७००७९९९९८	२१०८७९९९९८	१०९९९९९८
८९४	७९९२२६	७००९९९९९८	२१०८७९९९९८	१०९९९९९८
८९५	८०१००५	७०११९९९९८	२१०८७९९९९८	१०९९९९९८
८९६	८०२८८६	७०१३९९९९८	२१०८७९९९९८	१०९९९९९८
८९७	८०४६६८	७०१५९९९९८	२१०८७९९९९८	१०९९९९९८
८९८	८०६४४७	७०१७९९९९८	२१०८७९९९९८	१०९९९९९८

वर्ग, घन, आणिसूच.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गसूच.	घनसूच.
८९९	८०८२०१	७२६५७२६९९	२९.९८३३२८७	९.६५१३१६
९००	८१००००	७२९००००००	३०.०००००००	९.६५५०९५
९०१	८११८०१	७३१५३३७०१	३०.०१६६६२०	९.६५८८६
९०२	८१३६०४	७३३८७००००	३०.०३३३३१५८	९.६६२०५५
९०३	८१५४०९	७३६२१५३३०	३०.०५१५५०५	९.६६५६५५
९०४	८१७२१६	७३८५६३३६५	३०.०६६५८२८	९.६६९७५६
९०५	८१९०२५	७४०९२१७६२५	३०.०८३२१७५	९.६७३७५०
९०६	८२०८३६	७४३२७७५१६	३०.०९९८३३९	९.६७७९०२
९०७	८२२६४५	७४५६३३६५३	३०.११६५००७	९.६८२०६०
९०८	८२४४६५	७४८००१३३१३	३०.१३३०३०३	९.६८६३१६
९०९	८२६२८१	७५०३६५८५९	३०.१५०६२६८	९.६९०६७०
९१०	८२८१००	७५२७३७१०००	३०.१६६२०६१	९.६९५०९१
९११	८२९९२१	७५५१०९०३१	३०.१८२७७६५	९.६९९५६६
९१२	८३१७४५	७५७४८०५५२०	३०.१९९३७७७	९.७०४०६१५
९१३	८३३५६९	७६०८५५५८७	३०.२१५८०८८	९.७०८५५८
९१४	८३५३८६	७६३२५१९५५	३०.२३२५३२८	९.७१३०६८६
९१५	८३७२०५	७६५६०६०७५	३०.२४९१६६९	९.७१७६३७७
९१६	८३९०२६	७६७९७५२८६	३०.२६५८९९९	९.७२२२७२
९१७	८४०८४८	७७०३५५२१३	३०.२८२६०७८	९.७२६९३०५
९१८	८४२७०५	७७२७३०६३३	३०.२९९३१५८	९.७३१६८३५
९१९	८४४५६१	७७५१०५५५८	३०.३१६०१२८	९.७३६३६३
९२०	८४६४०९	७७७४८००००	३०.३३२६५१८	९.७४१०८८८
९२१	८४८२२१	७७९८५८६६१	३०.३४९३५८९	९.७४५८११
९२२	८५००८०	७८२२३७७५०	३०.३६६०५३९	९.७५०५३१
९२३	८५१९३६	७८४६१७०६७	३०.३८२७५५१	९.७५५२५८
९२४	८५३७७६	७८६९९६०२५	३०.३९९४६८३	९.७६०००३
९२५	८५५६२५	७८९३७५१२५	३०.४१६१७१७	९.७६४७५५
९२६	८५७४७६	७९१७५४२७६	३०.४३२८८०१	९.७६९५०६
९२७	८५९३३०	७९४१३३३८७	३०.४४९६०७७	९.७७४२५७
९२८	८६११८५	७९६५१२४५३	३०.४६६३०९५	९.७७९००८
९२९	८६३०४१	७९८८९१५०८	३०.४८३०१५३	९.७८३७५९
९३०	८६४८९०	८०१२७०७०००	३०.४९९७२१५	९.७८८५१०
९३१	८६६७५१	८०३६५००००	३०.५१६४२८६	९.७९३२६०
९३२	८६८६०५	८०६०३०५६५	३०.५३३१३५०	९.७९८०११

(८४)

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन	वर्गमूळ.	घनमूळ.
१३३	८००४८१	८१२१६३३३	३० ५४ ५०४८३	१०७७१-६४
१३४	८०२३५६	८१४०८५०४	३० ५६१४१३६	१०७७८७४
१३५	८०४२२५	८१५०००३७५	३० ५७७७६५७	१०७८८६२
१३६	८०६०९६	८२००२१८५६	३० ५९४११७१	१०७९८४६
१३७	८०७९६७	८२२६५६६५३	३० ६१०४५५७	१०८०८२९
१३८	८०९८४०	८२५२९३६७२	३० ६२६७८५७	१०८१८१९
१३९	८११७१३	८२७९३६०१८	३० ६४३१०६८	१०८२८०६
१४०	८१३६००	८३०५८४०००	३० ६५९४११४	१०८३८६१
१४१	८१५४८१	८३३२३७६२१	३० ६७५७२३३	१०८४८३४
१४२	८१७३६४	८३५८८८८८८	३० ६९२०१८५	१०८५८०४
१४३	८१९२४५	८३८५६१८०३	३० ७०८३०५१	१०८६८७१
१४४	८२११२६	८४१२३३३८४	३० ७२४५६३०	१०८७८३६
१४५	८२३००७	८४३९०८६५५	३० ७४०८५२३	१०८८८१९
१४६	८२४८८८	८४६५८०५३६	३० ७५७११३०	१०८९८५५
१४७	८२६७६९	८४९२७१२३	३० ७७३३६५१	१०९०८१७
१४८	८२८६५०	८५१९७१३६३	३० ७८९६०८६	१०९१८७३
१४९	८३०५३१	८५४६७७३४९	३० ८०५८४३६	१०९२८२५
१५०	८३२४००	८५७३७५०००	३० ८२२०७००	१०९३८७६
१५१	८३४२७१	८६००८५३५१	३० ८३८२८७१	१०९४८३४
१५२	८३६१४२	८६२८०१४०८	३० ८५४४७३३	१०९५८३६
१५३	८३८०१३	८६५५१३१७७	३० ८७०६१८१	१०९६८१३
१५४	८३९८८४	८६८२५०६६४	३० ८८६८१०४	१०९७८५४
१५५	८४१७६५	८७०९८३८७५	३० ९०३०७४३	१०९८८६२
१५६	८४३६४६	८७३७२२८१६	३० ९१९२४५७	१०९९८२८
१५७	८४५५२७	८७६४६४४३३	३० ९३५४१६६	११००८५६२
१५८	८४७४०८	८७९२१७११२	३० ९५१५७६१	११०१८१३
१५९	८४९२८९	८८१९७४०७१	३० ९६७७२४४	११०२८२२
१६०	८५११७०	८८४७३६०००	३० ९८३८६६६	११०३८४८
१६१	८५३०५१	८८७५०३६८१	३१ ०००००००	११०४८७३
१६२	८५४९३२	८९०२७७१२८	३१ ०१६१२४९	११०५८९८
१६३	८५६८१३	८९३०५६३७७	३१ ०३२२४३३	११०६९१३
१६४	८५८६९४	८९५८३५३४४	३१ ०४८३४१५	११०७९३०
१६५	८६०५७५	८९८६१४३२१	३१ ०६४४४४९	११०८९४५
१६६	८६२४५६	९०१४०३८६६	३१ ०८०५४४५	११०९९५७

वर्ग, पन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	पन.	वर्गमूळ.	पनमूळ.
१६३	११५०८	१०४२३१०६३	३१०८६६२३६	१०८८७६७
१६४	१३७०३५	१०७०३६२३२	३१०११२६१८५	१०८२१७५
१६५	१३८६६१	१०८८१३२०८	३१०१२८७६५०	१०८११५०
१७०	१४०१००	११२६७३०००	३१०१४४८२३०	१०८८८६८३
१७१	१४२८५१	११५४८८६११	३१०१६०८५३१	१०८८३३८३
१७२	१४४७८५	११८३३००००	३१०१७६८१५५	१०८८७७८३
१७३	१४६७२१	१२११६७३१५	३१०१९२८७७५	१०८९१७८
१७४	१४८६७६	१२४०१०४२५	३१०२०८८७३१	१०८९२१७४
१७५	१५०६३५	१२६८५६३७५	३१०२२४९१००	१०८९५६६३
१७६	१५२५७६	१२९७१४१७६	३१०२४०८८८७	१०८९९३५१
१७७	१५४५२१	१३२५७४५३३	३१०२५६८८८३	१०९०३७३८
१७८	१५६४८५	१३५४४१३५३	३१०२७२८८१५	१०९०६९३३
१७९	१५८४४१	१३८३१३७३१	३१०२८८८७७७	१०९११५०५
१८०	१६०४००	१४१११२०००	३१०३०४९६१७	१०९१६८८५
१८१	१६२३६३	१४४०७६१५१	३१०३२०९९८५	१०९२२६६३
१८२	१६४३२५	१४६०६६१६८	३१०३३६८७१३	१०९२८६३६
१८३	१६६२८५	१४८०६२०८७	३१०३५२८३०८	१०९३४००८
१८४	१६८२५६	१५००६३१०५	३१०३६८७७४३	१०९४०३८०
१८५	१७०२२५	१५२०६७१३५	३१०३८४७०१७	१०९४६७८८
१८६	१७२१८६	१५४०६८२५६	३१०४००६३६८	१०९५३१५५
१८७	१७४१६१	१५६०७०००३	३१०४१६५५६१	१०९५९४७७
१८८	१७६१४५	१५८०७२०३२	३१०४३२५६७३	१०९६६३८१
१८९	१७८१२३	१६००७३६६१	३१०४४८३७०५	१०९७३१५८
१९०	१८०१०५	१६२०७५०००	३१०४६४३६५५	१०९७९५५५
१९१	१८२०८१	१६४०७६३७१	३१०४८०१६३५	१०९८६५८०
१९२	१८४०६५	१६६०७७७८८	३१०४९६०३१५	१०९९३६५५
१९३	१८६०४१	१६८०७८६५७	३१०५११८०३५	१०९९९६५५
१९४	१८८०३६	१७००७९७७५	३१०५२७७६५५	११००६६७७
१९५	१९००२५	१७२०८०७७५	३१०५४३६३०६	११०१३३०५
१९६	१९२०१६	१७४०८१७३६	३१०५५९५७७	११०१९६४०
१९७	१९४००८	१७६०८२६७३	३१०५७५३०६८	११०२६६१०
१९८	१९६००५	१७८०८३६८३	३१०५९११३८०	११०३३३३८
१९९	१९८००१	१८००८४६९९	३१०६०६८६१३	११०४०६६६
१०००	१०००००	१०००००००००	३१०६२२७७६६	११०००००००

उत्तर, गुणोत्तर प्रमाण, आणि श्रेढी यांची रीति.

संख्या वेगळ्या दोन रीतींनी परस्पर परिक्षित्या आहेत.

एक परीक्षण दोन संख्यांचे वजाबाकीवर विचारण आहे, त्यास गणित संबंधी ह्याणतात; आणि दोन संख्यांचे वजाबाकीस उत्तर म्हणतात, दुसरे परीक्षण त्यांचे भागाकारावर विचारण आहे. त्यास भूमिति संबंधी ह्याणतात; आणि भागाकारास गुणोत्तर ह्याणतात. जसे ६ आणि ३ या दोन संख्यांनी वजाबाकी अथवा उत्तर $६-३=३$ बरोबर आहे, परंतु गुणोत्तर $\frac{६}{३}=२$ आहे.

कोणतेही परीक्षण करायास संख्या दोन पाहिजेत; जी संख्या परीक्ष्य आहे तीस प्रथम लिहून अगसर ह्याणतात; आणि ज्या संख्येशी प्रथम परिक्षित्य त्या संख्येस पुढे लिहून उपाग्रसर ह्याणतात. जसे वरचे दोन संख्यांनी ६ अग्रसर, आणि ३ उपाग्रसर आहे.

जर संख्यांची दोन किंवा अधिक युग्मे आहेत, आणि त्यांचे उत्तर अथवा गुणोत्तर सम आहे; तेव्हा त्या समतेस प्रमाण ह्याणतात, आणि उत्तर व गुणोत्तर यांचे पदांस प्रमाण पदे ह्याणतात. जसे ही दोन युग्मे, ४, २, आणि ८, ६, हीं गणित प्रमाण पदे आहेत, कारण $४-२=८-६=२$; आणि हीं दोन युग्मे, २, १ आणि ६, ३ हीं भूमिति प्रमाण पदे आहेत, कारण $\frac{२}{३}=\frac{६}{९}=२$.

संख्या भूमिति प्रमाणात आहेत असे दाखवाया करितां मत्त्येक युग्मां दोन पदां मध्ये उभे दोन बिंदू करितात; आणि मत्त्येक युग्मांचे मध्ये चार बिंदू देतात, जसे ४, २, ६, ३ हीं चार पदे या प्रमाणे लिहितात.

४ : २ :: ६ : ३ यांत अर्थ हाच आहे कीं ४ ही संख्या २ या संख्येस आहे, जसे ६ ही संख्या ३ या संख्येस आहे, अथवा या प्रमाणे ४ : २ = ६ : ३, अथवा या प्रमाणे $\frac{४}{२} = \frac{६}{३}$, या दोहोंमध्ये अर्थ हाच आहे कीं ४ आणि २ यांचे गुणोत्तर ६ आणि ३ यांचे गुणोत्तराशी सम आहे.

प्रमाण दोन प्रकारचे आहे, रवंड आणि अरवंड, जेव्हा एक युग्माचा उपाग्रसर आणि त्याचे जबब्बचे दुसरे युग्माचा अग्रसर यांचे उत्तर किंवा गुणोत्तर सर्व युग्मांचे साधारण उत्तराशी किंवा तसेंच गुणोत्तराशी सम नाही. तेव्हा ते रवंड प्रमाण झाले. जसे, ४, २, ८, ६, हे रवंड गणित प्रमाण आहे, कारण $४-२=८-६=२$, परंतु $८-२=६$; आणि ४, २, ६, ३ हे रवंड भूमिति प्रमाण आहे, कारण $\frac{४}{२} = \frac{६}{३} = २$ परंतु $\frac{८}{३} = २$, हे गुणोत्तराशी सम नाही.

परंतु जेव्हा उच्चोत्तर अनुक्रम जबब्ब जबब्बचे दोन दोन पदांचे उत्तर किं

वा गुणोत्तर सम आहे, तेव्हा अशा प्रमाणास अरवंड ह्याणतान. आणि संख्या स्वतां अरवंड प्रमाण पदांची श्रेढी होतात. जसें २, ४, ६, ८, ही गणित श्रेढी आहे, कारण, $४-२=६-४=८-६=२$, या सर्वांचे उत्तर सम आहे; आणि २, ४, ६, ८, १०, ही भूमिति श्रेढी आहे, कारण, $\frac{४}{२} = \frac{६}{४} = \frac{८}{६} = २$ हे सर्वांचे गुणोत्तर सम आहे.

जेव्हा प्रमाणपदं एकापुढें एक चढतीं आहेत, तेव्हा चढती श्रेढी ह्याणतान. जेव्हा तींच पदं एकापुढें एक उतरतीं आहेत, तेव्हा उतरती श्रेढी ह्याणतान. जसें, १, १, २, ३, ४, इत्यादि, चढती गणित श्रेढी आहे. परंतु, १, ०, १, २, १, इत्यादि, उतरती गणित श्रेढी आहे.

आणि १, २, ४, ८, १६, इत्यादि, चढती भूमिति श्रेढी आहे, परंतु १६, ८, ४, २, १, इत्यादि, उतरती भूमिति श्रेढी आहे.

गणितप्रमाण आणि, श्रेढी.

गणित श्रेढीमध्ये सर्व संख्यांचें अथवा पदांचें उत्तर एकच आहे आणि गणित श्रेढीचे प्रथम आणि शेवट या दोन पदांस अनुक्रमें आदि आणि अंम ह्याणतान; आणि त्यांचे आंतील राहिले सर्व पदांस मध्य ह्याणतान. गणित प्रमाणाचा जो अतिउपयोगी अंश आहे तो पापुटील सिद्धान्त त्रिहिसा आहे.

प्रथम. सिद्धान्त. जेव्हा चार अवयवी गणितप्रमाणांत आहेत, तेव्हा आद्यंताचीं बरीज दोन मध्य पदांचे बेरिजेचे बरोबर आहे जसें या नोंदोंत, २, ४, ६, ८, एथें $२+८=४+६=१०$

दुसरा सिद्धान्त. कोणतेही अरवंड गणित श्रेढीमध्ये आद्यंतांची बरीज दोन मध्य पदांचे बेरिजेचे बरोबर आहे, जीं मध्ये पदं आद्यंतांपासून समान अंतरानें आहेत, अथवा श्रेढी विषमपद असल्यास मध्य पदांचे दुपटीचे बरोबर आहे जसें या पदांत १, ३, ५, एथें $१+५=३+३=६$.

आणि या श्रेढींत २, ४, ६, ८, १०, १२, १४, एथें $२+१४=४+१२=६+१०=८+८=१६$.

तिसरा सिद्धान्त, कोणतेही गणित श्रेढीतील आद्यंतांची वजाबाकी त्याच श्रेढीचें उत्तर एकोन गळानें गुणिलें त्या गुणाकाराचे बरोबर आहे. जसें या दाहापदांत २, ४, ६, ८, १०, १२, १४, १६, १८, २०, यांचें उत्तर २, आणि एकोनमळ १० आहे; तेव्हा आद्यंतांची वजाबाकी ह्याप्रमाणे $२०-२=१८$, आणि ही $२+१८=२०$

बाजकरितां, अतिमोर्धेपद, एकोनगच्छानें गुणितें उत्तर आणि अतिरूढावष दयांचें बेरीज बरोबर आहे.

चौथासिद्धांत. कोणतेही गणित श्रेदीचें सर्वधन, आद्यंतांची बेरीज गुणि ती गच्छानें आणि तो गुणाकार भागिला दोहोनीं याचे बरोबर आहे, अथवा आद्यंतांची बेरीज गच्छानें गुणून तो गुणाकार श्रेदीचे सर्व धनाचे दुपट होतो.

सांगितले श्रेदीचीं सर्वपदे सरळ रीतीनें अनुक्रमें एक ओळीं व लिहून पु नः तीन पदे व्युत्क्रमरीतीनें पदारवालीं पद अशीं दुसरे ओळींत लिहून त्या दो न ओळी रवालीं सर्वपदांच्या वेगळाल्या बेरीजाच्यावा, अशाने हें स्पष्ट होतें जसें.

या श्रेदीमध्ये १, ३, ५, ७, ९, ११, १३, १५.

सुल्लमानें १५, १३, ११, ९, ७, ५, ३, १,

यांच्या बेरीजा १६ + १६ + १६ + १६ + १६ + १६ + १६ + १६;

ही बेरीज वरचे एक श्रेदीचे सर्वधनाचे दुपट आहे.

अथवा आद्यंतांची बेरीज श्रेदीचे पद संख्या वेळाच्यावी.

यासिद्धांता पासून आदि, अंत, गळ, उत्तर, आणि सर्वधन, या पांच - अवयवांतून कोणतेही तीन सांगितले असतां बाकीचे दोन निपतील. असें पुढील ह्मणांत.

प्रथम ह्मण.

आदि, अंत, आणि गळ हे तीन सांगितले असतां, त्यां पासून सर्वधन का दावयाचें.

आदि, अंतांची बेरीज घ्यावी. आणि ती गळानें गुणावी. नंतर तो गुणाका र दोहोनीं भागावा, जो भागाकार येईल ते सर्वधन झालें.

उदाहरणें.

प्रथम, आदि ३, अंत १९, आणि गळ २ यां पासून सर्वधन का य होईल?

$$\begin{array}{r} १९ \\ ३ \\ \hline २२ \\ ९ \\ \hline २७१८ \\ ९९ \end{array}$$

हें उत्तर.

अथवा $१० + ३ + ९ = २२ + ९ = ३१ + ९ = ४०$ सर्वधन हें पुर्वान्तराबरोबर आहे. दुसरे, य घ्यालोंत नारा प्रथम मध्ये इंग्रजी रीतीने प्रमाणें किती टोले वा नान ते सांग.

उत्तर, ७८ टोले.

तिसरें, विनासनामें गांव आहे; तेथें एका पासून चौवीस अवसर बाजतात, दिवस रात्र मिळून त्या पळ्याळांत २४ अवसरांत किती ठोले बाजतात तें सांग.

उत्तर, १०० ठोले.

चवथें, कोणे गृहस्थास कर्ज आहे; त्यास इंग्रजी विलायती मानानें एक वर्षांत आठवडे ५२ तेढां प्रथम आठवड्यास १ रूपया, पुढें प्रति आठवड्यास चढनें देतां शेवटील आठवड्यास रूपये. १० ३ चा प्रमाणें दिल्यास तो गृहस्थ १ वर्षांत कर्ज मुक्त होतो; तेढां आरंभीस गळें कर्ज किती रूपये तें सांग.

उत्तर, २७०४ रु.

दुसरें कृत्य.

आदि अंत आणि गच्छ हे तीन सांगितले असतां, त्यां पासून उत्तर काढावयाचें. अति मोठे शेर पदांतून अतिलहान पद वजा करावें, आणि बाकी राहील ती एक कोन गळानें भागावी, जो भागाकार पेईल तें उत्तर झालें.

उदाहरणें.

प्रथम, आदि ३, अंत १९, आणि गच्छ ९, यां पासून उत्तर काढावें.

$$\frac{19-3}{9} = \frac{16}{9} = 2 \text{ हें उत्तर.}$$

दुसरें, आदि १०, अंत ७०, आणि गच्छ २१, आहे; यां पासून उत्तर आणि सर्वधन काढावें.

३ उत्तर, आणि ८४० सर्वधन.

तिसरें, कोणी गृहस्थास कर्ज आहे. त्यास विलायती मानानें एक वर्षांत आठवडे ५२ तेढां प्रथम आठवड्यास १ रूपया पुढें चढनें शेवटील आठवड्यास १०३ रूपये देतां १ वर्षांत कर्ज मुक्त होईल, तेढां उत्तर काढावें सांग.

२ रूपये, हें उत्तर.

तिसरें कृत्य.

एक शेवटील पद, उत्तर आणि गच्छ, हीं तीन सांगितलीं असतां, यां पासून दुसरें शेवटील पद व सर्वधन काढावयाचें.

उत्तर एकोन गळानें गुणून, तो गुणाकार आदि अंतानी वजावा की होईल; म्हणजे, अतिलहान पद सांगितलें आहे तर हा गुणाकार त्या पदाशीं मिळवावा. म्हणजे अति मोठें पद झालें, अति मोठें पद सांगितलें आहे तर तो गुणाकार त्या पदा व वजा करावा, म्हणजे अतिलहान पद झालें.

उदाहरणें.

प्रथम, अतिलहान शेवटील पद ३, उत्तर २, आणि गच्छ ९, हें सांगितलें. याज पासून अति मोठें शेवटील पद व सर्वधन काढावें.

	२	
	१६	
	२	
याजकरिता	१६	हे अतिमोठे शेवटील पद.
	३	हे अतिनहान शेवटील पद.
	२२	वेरी न
	२	गळ.
	२०१६	
	१६	सर्वधन हे उत्तर.

दुसरे, जर अतिमोठे शेवटील पद २० उत्तर ३ आणि गळ २१ आहे तर या पासून अतिनहान शेवटील पद व सर्वधन काय मिळेल ते सांग.

उत्तर. १० अतिनहान शेवटील पद, ८४० सर्वधन.

तिसरे, कोणी एक गृहस्थास कर्ज आहे. विलायतीमानाने एक वर्षात आठवडे ५२ ते ह्यां मध्य आठवड्यास १ रुपया, दुसरे आठवड्यास ३ रुपये याप्रमाणे दर आठवड्यास दोन दोन रुपये चढत देता; एक वर्षात ५२ हप्त्यानीं तो गृहस्था कर्जमुक्त होईल, ते ह्यां ५२ वं हप्त्यास किती रुपये व सर्व कर्ज किती आहे ते सांग.

उत्तर, शेवटील हप्त्यास १०३ रुपये, आणि सर्व कर्ज २००४ रुपये.

चवथें कृत्य.

कोणतेही सांगितल्या दोन पदांचे गणित मध्यप्रमाण काढावयाचे.

दोनपदे अथवा दोन संख्या सांगितल्या आहेत त्यांची वेरीज घ्यावी, नंतर त्या चे वेरीजेचे अर्ध करावे. ते अर्ध, गणित मध्यप्रमाण झाले.

उदाहरण.

४ आणि १५ हीं दोन पदे अथवा संख्या सांगितल्या, यांचे गणित मध्यप्रमाण काय होईल.

$$\frac{4+15}{2} = 9, \text{ गणित मध्यप्रमाण झाले. हे उत्तर}$$

पाचवें कृत्य.

कोणतेही दोन पदां पासून दोन गणित मध्यप्रमाण काढावयाचे.

अतिनहान पद अतिमोठे पद दोन वजा करावे. बाकी राहील ती ३ नीं भागावी. जो भागाकार येईल ते गणित घेणीचे उत्तर झाले; नंतर हे उत्तर अतिनहान पदाशी मिलावावे. व अतिमोठे पदां तून वजा करावे. म्हणजे त्या दोन पदां जवळचीं पदे मध्यप्रमाणे झाली. पुढे हे याप्रमाणे करीत जावे. म्हणजे दोन दोन मध्यप्रमाणे निघतील.

उदाहरण.

२ आणि - या दोन संख्यांची दोन गणित मध्य प्रमाणे सांग

२
१६-

२ हे उत्तर. तर $2 = 4$ एक गणित मध्य प्रमाण.

आणि $4 + 2 = 6$ दुसरे गणित मध्य प्रमाण

साहाय्यकृत्य.

कोणतेही दोन पदां पासून हातीं ते वटां मध्य प्रमाणें काढावयाचें

अतिमोठे पदांतून अतिलहान पद वजा करावें. बाकी राहिली ती एकधिक मध्यगच्छानें भागावी. जो भागाकार येईल तो श्रेणीचें उत्तर द्यालें; नंतर ते उत्तर अतिलहान पदां पासून पदांतमिळवीत चलावें. अथवा, अतिमोठे पदां पासून पदांतून वजा करीत चलावें. म्हणजे हातीं ते वटां मध्य प्रमाणें येतील.

उदाहरणे.

२ आणि १४ या दोन संख्यांपासून पांच गणित मध्य प्रमाणें काढावीं.

$$\begin{array}{r} 14 \\ 2 \overline{) 14} \\ \hline 7 \end{array} \text{ उत्तर}$$

नंतर हे उत्तर अतिलहान पदांशीं मिळवीत जातां ४, ६, ८, १०, १२, हीं पांच गणित मध्य प्रमाणें निघालीं हे उत्तर.

यांन जे कांहीं अधिक लिहावयाचें राहिले ते तीं जुगणिता मध्ये पाहा.

भूमिति प्रमाण आणि श्रेढी.

जर २ युग्मेचेतलीं, जसें ६ : ३, आणि १४ : ७. म्हणजे पूर्वी सांगितल्या प्रमाणें तीं व्यवहारी अपूर्णांकरूपानें लिहिलीं जाणात $\frac{14}{3}$ आणि $\frac{1}{2}$, आतां त्यांच गुणोत्तर सम आहे किंवा विषम आहे हे पाहावयासाठीं त्यांस सम छेद केले पाहिजे. असें झाल्यावर 6×2 आणि $14 \div 7$ हे दोन नवे अंश होतील. जर ते नवे अंश सम आहेत तर युग्माचें गुणोत्तर बरोबर आहे. या ज्ञ. रितां.

प्रथम सिद्धांत, जर चार अवयवी भूमिति प्रमाणांत असतील, तर आद्यंतांचा गुणाकार २ मध्यांचे गुणाकारा बरोबर होईल.

आणि याजवरून जर दोन मध्यांचा गुणाकार कोणते एक शेवट पदांनं भागिला असता. भागाकार येईल तो दुसरे शेवट पद होईल जसें वरचे संख्यां मध्य, जग मध्यांचा गुणाकार ४२ हा ६ या एक शेवट पदांनं भागिला असता. भागाकार ७ येतो ते दुसरे शेवट पद आहे. आणि जर ४२ हा ७ याने भागिला असता भागाकार ६ येतो ते

दुसरे शेषर पद आहे. घेराशिकांमध्ये सांगितलेकमीस आश्रय हाच आहे.

यावरूनही पाहतां, ६, ३, १४, ७, अशा कोणात्याही चार संख्यांमध्ये जर मध्यांचा आणि शेषरांचा गुणाकार बरोबर आहे तर यांतच गुणोत्तरही बरोबर आहे असें जाणावे $\frac{६}{३} = \frac{१४}{७}$ अथवा या प्रमाणातीसचा ६:३::१४:७. याजवरून दुसरा सिद्धांत. कोणतेही दोन गुणाकार बरोबर असतील तर त्यांचे वेगळे कर्त्यांमधून एक प्रमाण करितां येईल.

जर २ मध्यपदे बरोबर असतील, जसें या पदांमध्ये ३, ६, ६, १२ तर त्या मध्यपदांचा गुणाकार वर्ग होईल. याजवरून,

तिसरा सिद्धांत. कोणतेही दोन संख्यांचे मध्यप्रमाण त्या संख्यांचे गुणाकाराचे वर्गमूळ आहे.

कोणतेही प्रमाणांचीं वेगळीं पदे स्थळांतर करून लिहितीं, अशीं कीं ज्यांत आद्यंतांचा गुणाकार मध्यांचे गुणाकारा बरोबरच राहील, तर प्रमाणाचे शब्दांचा नापा होत नाही.

जसें ६:३::१४:७. या प्रमाणांमध्ये $६+७=३+१४$ त्यांचे शेषर पदांस किंवा मध्यपदांस स्थळांतर करितां येईल हे परावर्तने होतें असें ह्मणतात.

जसें ६:१४::३:७

अथवा, ७:३::१४:६

अथवा ७:१४::३:६

अथवा, दुसरे रीतीने, शेषर पदे मध्यपदांचे स्थळांतर लिहितां येतील, हे-
अत्ययाने होतें असें ह्मणतात.

जसें ३:६::७:१४

अथवा तिसरे रीतीनें दोनही अयसरांस अथवा उपायसरांस प्रमाणनेषा नाशन होतां कोणतेही एक संख्येनें गुणतां किंवा भागितां येईल.

जसें $६+४:३::१४+४:७$ ह्मणजे २४:३::१८:७

आणि $६÷२:३::१४÷२:७$ ह्मणजे ३:३::७:७

आणि व्यवहारी अपूर्णांकाने भिन्नवणीतील दुसरे दीपे मध्यंजी प्रतिज्ञा आहे ती प्रमाण पदांस लाविली असतां, जसें यांत २०:६::१५:३, अथवा $३०=१५$ ने घ्यायांस ती प्रतिज्ञा लाऊन हे रूप होतें.

$\frac{३०}{३} = \frac{१५}{३}$ आणि $\frac{३०}{३} = \frac{१५}{३}$ याजवरून.

चवथा सिद्धांत, अयसरांची बेरीज अथवा कजावाकी उपायसरांचे बे-

रिजेस अथवा वजाबाकीस आहे, जसा त्यांतील कोणताही अग्रसर त्याचे उपायसरास आहे.

पांचवासिद्धांत. अग्रसरांची बेरीज त्यांचे वजाबाकीस आहे, जशी उपायसरांची बेरीज त्यांचे वजाबाकीस.

अशारीतीने जर युग्मांची श्रेढी असेल, जसे $\frac{६}{३} = \frac{१०}{५} = \frac{१४}{७} = \frac{१८}{९}$; त्यां सहाचा प्रमाणें रूप होईल. $\frac{६+१०+१४+१८}{३+५+७+९} = \frac{५८}{२४} = \frac{३०}{१५}$ इत्यादिकां जवळ.

साहाय्यसिद्धांत. भूमिति प्रमाणांत युग्मांचे कोणतेही श्रेढीमध्ये सर्व अग्रसरांची बेरीज त्यांतील सर्व उपायसरांचे बेरिजेस आहे, जसा त्यांतील कोणतेही एक युग्मांचा अग्रसर त्याचे उपायसरास.

सातवासिद्धांत. जर दोन प्रमाणें अनुक्रमें पदशः गुणिलीं, तर ते गुणाकारन वें एक प्रमाण करितील.

जसें, जर $३० : १५ :: ६ : ३$

आणि $२ : १ :: ४ : ६$

तर $३० + २ : १५ + १ :: ६ + ४ : ३ + ६$

अथवा $६० : ४५ :: २४ : १०$ अथवा $\frac{६०}{२५} = \frac{२४}{१०}$

आठवासिद्धांत. जर चार पदें प्रमाणांत आहेत, तर त्यांचे वर्ग घनादिक ही प्रमाणांत होतील.

कां. स्पष्ट आहे कीं, यांचे हेंच मात्र आहे कीं एकच प्रमाण वर प्रमाणें पुनः पुनः गुणून ते गुणाकार वर्ग घनादि होतात

तसेच हे गुणकरणीवरही लागतात.

जसें $\sqrt{३०} : \sqrt{१५} :: \sqrt{६} : \sqrt{३}$

आणि $\sqrt{१२} : \sqrt{३} :: \sqrt{४} : \sqrt{१}$

कां $\frac{\sqrt{३०}}{\sqrt{१५}} = \frac{\sqrt{६}}{\sqrt{३}} = \frac{२}{१}$ आणि $\frac{\sqrt{१२}}{\sqrt{३}} = \frac{\sqrt{४}}{\sqrt{१}} = \frac{२}{१}$

आणि $\frac{\sqrt{१२}}{\sqrt{३}} = \sqrt{\frac{१२}{३}} = \sqrt{४} = २$

नववासिद्धांत. भूमिति श्रेढीचे शेंबट पदांचा भागाकार त्याच श्रेढीचे गुणोत्तरास घात प्रकाशक एकोनगच्छ केला इतक्या घाताचे बरोबर आहे.

जसें, $२४० : १६ : १३२ : ६० : १२० : २५६ : ५१२ : १०२४$, या दहा पदांत गुणोत्तर २ आहे, एकोनगच्छ ९ आहे; तेव्हां शेंबटांचा भागाकार $\frac{१०२४}{२} = ५१२$, आणि $\frac{१०२४}{९} = ११४$ हेही बरोबर आहेत.

याजकरितां अनिघोर्वें पद. अनिलहान पद गुणिलें गुणोत्तराचे घाता

जंग या पदार्थमवस्थान २, ४, ८, १६, ३२, ६४, १२८, २५६, ५१२,
१०२४, ज्यांचे गुणोत्तर २० प्रसे भांड १०२४ + $\frac{१०२४-२}{२-१}$ = १०२४ + १०२२ = २०४६

एनीमड्वान्त समजावयाकरिता कांहीं उदाहरणें लिहितां. वधूभिनि मध्यमा
पायावत किती एक वृत्त्येही सांगतो.

प्रथम, एक स्मृति श्रुति मध्ये दाहापद आहत. त्यांत अतिनहान पद १: आणि गुणानर २: ते व्हां यां पद आणि सर्वधन काय हाईत ?

दुसरे, कोणी एक गृहस्थासक जी आहंते असंकीं, यथमहस्यासरूपये १० पुंरं तर हस्यास दुपरीनेचढते पाप्रमाणं तरमाह्न्यास हमा देतां १२माह्न्यांती फरे न तेन्नां वागंच हस्यास किनी रूपये द्यावे पडतां न, व सर्वक जी किनी असेल ते मांग ?

पथमकृत्य.

त्या दोन संख्या परस्पर गुणाच्या नंतर त्या गुणाकाराचे वर्गमूळ काढावे, ते प्रथम
निष्पत्त्य प्रमाण होते.

दोन संख्या ३ आणि १२ यांचे लघुगुणित मध्यममाण काय ?

३६९६ भूमिनिषधयमाण है उत्तर.

कोणतेही दोन संख्यांची दोन भूमिति मध्यप्रमाणे काढायचे.

बोहीसंख्या साहससंख्येने भागावी. नंतर, त्याभागाकाराचे घनमूळ काढावे. ते पदार्थे गुणोत्तर होईल. तेव्हां सांगितलेले हानपद यागुणोत्तराने गुणावे तो.

गुणाकार मध्यम भूमिति मध्य प्रमाण झाले . नंतर हेच मध्य प्रमाण पुनः गुणोत्तराने गुणावे ते दुसरे भूमिति मध्य प्रमाण होईल . अथवा . सोनेपद गुणोत्तराने भागावे . तो भागाकार सोने भूमिति मध्य प्रमाण होईल . नंतर तेच पुनः गुणोत्तराने भागावे . तो भागाकार लाहान भूमिति मध्य प्रमाण होईल .

उदाहरण.

१ आणि २४ यांचीं दोन भूमिति मध्य प्रमाणे काढावीं .

आतां $२४ \div १ = ८$ याचे घनमूळ २ हे पदांचे गुणोत्तर झाले .

ते ह्या $१ + २ = ६$ आणि $६ + २ = १२$. हीं दोन भूमिति मध्ये प्रमाणे निघावीं .

अथवा $२४ \div २ = १२$. आणि $१२ \div २ = ६$ हीं वरचे बरोबर आहोत .

ह्याने १ आणि २४ यांचीं मध्य प्रमाणे ६ आणि १२ हीं दोन आहेत .

तिसरे कृत्य.

कोणतेही २ संख्यांचीं हाचीं तिनकीं भूमिति मध्य प्रमाणे काढावयाचे .

सोदी संख्या लाहान संख्येने भागावी . नंतर मध्य प्रमाणे जिनकीं हवीं

ती संख्या एकाधिक करून भागाकारास मूळ प्रकाशक जाणून त्या भागाकाराचे तिनके घात मूळ काढावे . ते गुणोत्तर झाले ह्याने एक मध्य प्रमाणा करितां वर्ग मूळ . दोन मध्य प्रमाणा करितां घनमूळ . तीन मध्य प्रमाणा करितु घात मूळ . या प्रमाणे पुढे ही . नंतर लाहान पद त्या गुणोत्तराने पुनः पुनः गुणावे . अथवा सोनेपद पुनः पुनः भागावे . ह्याने तिनकीं मध्य प्रमाणे निघतील .

उदाहरण.

१ आणि १६ या दोन संख्यांची चार मध्य प्रमाणे काढावीं .

आतां $१६ \div १ = १६$. याचे पंच घात मूळ २ . ते गुणोत्तर झाले .

ते ह्या $१ + २ = ३$. आणि $३ + २ = ५$. आणि $५ + २ = ७$, आणि $७ + २ = ९$.

अथवा $१६ \div २ = ८$. आणि $८ \div २ = ४$. आणि $४ \div २ = २$. आणि $२ \div २ = १$. ह्याने १, २, ४, ८ हीं चार १ आणि १६ यांचीं इतकीं भूमिति मध्य प्रमाणे आहेत .

सर्कन.

सर्कन ह्याने एकराती आहे . जाणें कोणतीही रास अथवा अवयवी हावेत बदे भागांत भागतां पड़े . जे भाग परस्परांत कोणतेही संगितने प्रमाणे निघतील

या रीतीने व्यवहारांत भाग्यांचा लाभ अथवा हानि किंवा व्यय यथास्थित चुकवितात . अथवा दिसाळ्यानें कण आणि धन यांची व्यवस्था करितात . अथवा दुष्टान

किंवा दुसरे कोणने कामांत बहून मनुष्यानी एकत्र मिळून जें कांहीं मिळविलें, त्याचे भाग करितान, अथवा, एकादी भूभित्तबहुकाक पडित आहे ती भोंवर गांवांस लागवडीकरितां वांटून देणें तर त्या त्या गांवांनी मनुष्य समुदाय पाहून त्यांस वांटून देतात;

सकत. एकेरी आणि दुहेरी ऐशी दोन प्रकारची आहे. जेव्हां प्रत्येक भाग केवळ कोणतेही एक संख्येशीं प्रमाणांत आहेत, म्हणजे भागांचे भाग एकच वेळेस कामांत लाविले आहेत, तेव्हां एकेरी; आणि जेव्हां प्रत्येक भाग दोन किंवा अधिक संख्यांशीं प्रमाणांत आहेत, म्हणजे भागांचे भाग भिन्न भिन्न वेळेस कामांत लाविले आहेत, तेव्हां दुहेरी.

एकेरी सकत.

सामान्यरीति.

ज्या संख्या भागांचे वेगळालें प्रमाण दाखवितान. त्यांची बेरीज घ्यावी, नंतर या प्रमाणें राशी सांगाय्या.

जशी भागांचे प्रमाण संख्यांची बेरीज: ... वांटावयाचे सर्व राशीस होतें.

तशी एक एक भागाची प्रमाण संख्या: ... त्या त्या संख्येचे वांट्यास होईल.

अथवा, जसें सगळे भांडवल.

सगळे लाभ अस अथवा हानीस होतें, तसें एकेकाचे विशेष भांडवल.

लाभ किंवा हानि याचें त्या त्या विशेष भागास होईल.

नाकाशाहायासाठीं सर्व विशेष भागांची बेरीज घ्यावी, ती सांगितले वांट्याचे सगळे संख्येचे बरोबर आली म्हणजे रबरी.

उदाहरणें.

प्रथम, २४० या संख्येचे तीन भाग केर, असें कीं, १, २, ३, या संख्या परस्पर प्रमाणांत आहेत, नसेल परस्पर प्रमाणांत होतील.

एथें, $1 + 2 + 3 = 6$, ही प्रमाण संख्यांची बेरीज.

तर जसें, $6 : 240 :: 1 : 40$ प्रथम भाग.

आणि जसें, $6 : 240 :: 2 : 80$ दुसरा भाग.

आणि जसें, $6 : 240 :: 3 : 120$ तिसरा भाग.

सर्वांची बेरीज २४० नाका.

दुसरें, तीन मनुष्यांनीं दुसऱ्या बंदरीं नेण्या करितां एके जाहाजावर २४० रंबंड धान्य भरिलें; त्या मनुष्यांचीं नांवें, अ. ब. क; त्यांन अ, ११० रंबंडी, आणि ब ९० रंबंडी व बाकी राहिलें तें क: पुढें नें जाहाज हाका रून चालिलें. नों समुद्रांत लुप्त जाहालें, तेव्हां

८५ रवंडी धान्य रावावेलागले, तो नोरा त्या मिचास बरोबर वांटतो कोणास किती येईल.

एथें, $११०४ : १७ = २०७$ रवंडी, अ. आणि ब. यांनीं भरिलें. याज करितां. $३४० - २०७ = १३३$ रवंडी, क. यांनीं भरिलें.

याजवरून जसें $३४० : ८५ : : ११०४$

अथवा जसें, $४ : १ : : ११०४ : २७ \frac{१}{२}$ रवंडी = अ. ची हानि.

आणि जसें, $४ : १ : : ९७ : २४ \frac{१}{२}$ रवंडी = ब. ची हानि.

आणि जसें, $४ : १ : : १३३ : ३३ \frac{१}{२}$ रवंडी = क. ची हानि.

सर्वांची बेरीज ८५ रवंडी, नाळा.

तिसरें, दोन सावकार. क. आणि ब. यांनीं मिळून १२०० रुपयेचें भांडवल केलें, त्यांत ७५० रुपये क. चे. बाकी ब. चे, पुढें व्यापार करितां ३०० रुपये लाभ झाला; वो त्या दोघांम भागाप्रमाणें बरोबर वांटून दे.

उत्तर क = १६७ -- पा. आणि ब = ११२ -- पा.

चवथें. तिघे सावकार, अ, प, ग. यांनीं मिळून ७००० रुपये भांडवल केलें, त्यांत १२३० रुपये अ. चे, ३५०० रुपये प. चे बाकी रुपये ग. चे, पुढें व्यापार कर्तां १२५५ रुपये लाभ झाला; तो एक एकास भाग प्रमाणें बरोबर वांटून दे.

उत्तर. $\left\{ \begin{array}{l} \text{अ} = ३२० \dots ४ \dots ४ \\ \text{प} = ६४१ \dots ३ \dots ३७ \\ \text{ग} = ३१३ \dots २ \dots ५४ \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} ७००० \\ १००० \\ ३००० \end{array}$

पांचवें. चार गांव मिळून महसूलाना दराब ७००० रुपये केला त्यांत लागवड-जमीन एक गांवांत २५० विघे आहे, व एक गांवांत ३५० विघे आहे, व एक गांवांत ४०० विघे आहे, व एक गांवांत ५०० विघे आहे; ते व्हां कोणते गांवांस विधेप्रमाणें किती रुपये महसूल देणें पडेल तो सांग.

उत्तर, $\left\{ \begin{array}{l} \text{वि.} \quad \text{रु.} \quad \text{पा.} \quad \text{चे.} \\ २५० = ११६६. \quad २. \quad ६६. \quad १५०० \\ ३५० = १६३३. \quad १. \quad ३३. \quad १५०० \\ ४०० = १८६६. \quad २. \quad ६६. \quad १५०० \\ ५०० = २३३३. \quad १. \quad ३३. \quad १५०० \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} ७००० \\ १००० \\ १००० \\ १००० \end{array}$

साहाबें. बहुकाळी पडित भूमि ३० विघे, २ पां. ३ काळ्या अशी तीन गांवांस ३ गन पधें आहे, ती त्या तीन भोंवद गांवांस वसाती प्रमाणें वांटून द्यावी, म्हणून सरकार ची आज्ञा त्यास वसान एके गांवांत १०० मनुष्यें, एके गांवांत ३२० , एके गांवांत ७५ ,

या प्रमाणें आह्म. तेव्हां कोणने गांवास किती भूमि विभाग येईल तो सांग.

$$\text{उत्तर, } \begin{cases} १००० = २० \text{ } ७३०४४६५ \\ ३२० = १३ \text{ } ५२०४५६५ \\ ७५ = ३ \text{ } १००५६५५ \end{cases}$$

सांगवें. कोणी एक मनुष्याकडे चार सावकारांचे कर्ज होतें. त्यांचे क. चे ५७० रु. २५, र. चे, १०० रु. २५ ग. चे, २२५ रु. ५५, चे, ७३० रु. पुढें तो पळून गेला. तेव्हां त्याचे यत्किंचित् सामान त्या सावकारांनी जमकून शिकविलें. त्याचे १०० रुपये आले, ते त्या सावकारांस द्यावा साई प्रमाणें वांटून द्यावयांचे. तेव्हां कोणत्यास किती रुपये वांटा आला तो सांग.

$$\text{उत्तर, } \begin{cases} ३७००१२ \text{ क. चा भाग.} \\ ७०६०२४ \text{ र. चा भाग.} \\ १४६०९ \text{ ग. चा भाग.} \\ ४७६०७ \text{ घ. चा भाग.} \end{cases}$$

आहवें, मालसूझां ९००० रु. किमतीचे एक गळबत तुफान होऊन समुद्रांत नुडालें. त्याच विभाग र. चा $\frac{१}{२}$ र. चा $\frac{१}{३}$ बाकी घ. चा; त्या गळबताचा विमा ५४०० रुपये केला होता. ते येतील परंतु मूळ किमतीत जी रक्कद आली ती कोणावर किती वा लावीतें सांग.

$$\text{उत्तर, } \begin{cases} ४५० \text{ र.} \\ ९०० \text{ रु.} \\ २२५० \text{ घ.} \end{cases}$$

नववें, प. फ. ब. म, ऐसे चार मनुष्य यांनी कोणें कायान २५० रु. रक्कचे ला, त्याचा अगर या प्रमाणें, प. ३ फ. ३ ब. ६ म. ६, केला होता; पुढें तो रक्कचे वांटून घेणे आहे. तेव्हां कोण कोणास किती किती वांटा आला तो सांग.

$$\text{उत्तर, } \begin{cases} १७ \text{ प. चे भागास.} \\ ६० \text{ फ. चे भागास.} \\ ४० \text{ ब. चे भागास.} \\ ३० \text{ म. चे भागास.} \end{cases}$$

राहवें. कोण एक कित्ता सांभाळावया करितां हुजूर हुजूर पांच जबातीरवाना केव्हा होत्या, त्यांचे लोक भरणा एके जमातींत ५४, दुसरे जमातींत ५१. निखरे. ४० चवथे ३०, पांचवे ३०, या प्रमाणें होता, पुढें त्या कित्ताचे चौकीस दर प्रहारास ७६ पत्रांचें आगव्यास, तेव्हां दर प्रहारास जमातीचे लोक भरण्या प्रमाणें कोणते जमाती नें किती किती पत्रांचें द्यावीतें सांग.

उत्तर,

५४ चे जमातीतील मनुष्ये.	१८
५१	१७
४८	१६
३९	१३
३६	१२

दुहेरीसर्कन.

दुहेरीसर्कन, वरसो गित त्याप्रमाणे प्रशा प्रकाराने आणवने, जेथे भाग्या चीं भांडवले भिन्नभिन्न वेळेस कामांत लाविली आहेत.

१. **रिति.** प्रत्येक मनुष्याचे भांडवल त्याचे त्याचे कामांत भोगले जावने गुणाचे. नंतर तो गुणाकार प्रमाणाने भागावा जसें एकेरीसर्कनने सांगितले आहे, ह्या जे या प्रमाणे राखी होतात.

नसें सर्वगुणाकारांची बेरीज.

सर्व लाभ किंवा हानि किंवा वाटा याचा भवयवी पास आहे.

नसें प्रत्येक विशेष भागाकार.

त्याचे त्याचे विशेष भागास होईल.

उदाहरणे.

प्रथम. दोघानी सरकतीने व्यापार केला. त्याने भांडवल क. चे ५०० रु. त्या म ४ महिने झाले, आणि ग. चे ६०० रुपये त्यास ५ महिने झाले, त्या सर्कन व्यापारांत नफा २४० रु. झाला, तो दोघांस भागाप्रमाणे कसा वाटून द्यावोने सांग.

$$\begin{array}{r} \text{क.} \quad \text{ग.} \\ \text{एथें.} \quad ५०० \quad ६०० \\ \hline २००० \quad + \quad ३००० = ५००० \end{array}$$

तर जसें, ५००० : २४० :: २००० : ९६ रु. क. ज्ञानफा.

आणि जसें, ५००० : २४० :: ३००० : १४४ रु. ग. ज्ञानफा.

दुसरे. च. आणि ज. या दोघांनी एक कुदण घोडी चारावया करिनां मरवना दशवून घेनांत. मरवना ५४० रु. त्या कुदणांत, च. ची २१ घोडी ३०

दिवस चरली, आणि ज. ची २१ घोडी १० दिवस चरली, मरवयाचे रुपये दोघांनी कि-

४. यादीची मरवना कावमाणे आहे, जे दोघांना बरोबर आहेत, ते दोघांनी सर्कनने सांगितल्याप्रमाणे स्पष्ट आहे की, लाभ किंवा हानि याचे भोग भांडवल प्रमाणे आहेत. आणि जे दोघांनी भांडवले बरोबर, ते दोघांनी भागाकाराप्रमाणे होतात. या जकारिनां जे दोघांनी बरोबर नोहीत, ते दोघांनी भागादो हें सर्वगुणाकाराप्रमाणे निश्चय होतों.

ती किती घाबोने सांग.

	रु.	पा.	रें.
उत्तर.	{ च. २३२ - - ३ - - ७०		
	{ ज. १०७ - - २ - - ५०		

तिसरें, प. फ. व. या तिघांनी गाईंचा रायास कुरण घेतलें. त्याचें देणें एकव
षांचें १०० रुपये. त्यांत प. च्या ७ गाई १ महिनें, फ. च्या ७ गाई ५ महिनें आणि व.
च्या ४ गाई १२ महिनें, या प्रमाणें चरल्या. तेव्हां १०० रु. देणें त्याचा विभाग कोणी-
किती घाबोने सांग.

	रु.	पा.	रें.
उत्तर.	{ प. ५५ - - १ - - ५		११५
	{ फ. ११० - - १ - - ६०		११०
	{ व. १२६ - - १ - - २६		१२६

चवथें, कोणें एक किड्या फोंजेन हल्ला करून घेतला. ते समयी तेथें १००००
रुपये मिळाले. ते फोंजेन दरमाहा दर आसामीस २० रुपये असं ४ जमानदार ६ महि
ने चाकरी करीत होते. दरमाहा दर आसामीस १५ रुपये असं १२ हाजलदार ६ महि
ने चाकरी करीत होते, व दरमाहा दर आसामीस ११ रुपये असं ११ शिपाई १ महिने
चाकरी करीत होते, उदें सरकारचा हुकूम झाला की, ते रु. त्या फोंजेम आसामी तेनात चा
करीची सुटत या ग्यंत प्रमाणें बांदून लावेव्हाणून त्यास कोणकोणास किती घेनात ते सांग.

	रु.	पा.	रें.
उत्तर.	{ १२४ - - ३ - - ४२	१०३०	जमानदार आसामी ४ त्यांचा बांदा.
	{ २००० - - ३ - - ६९	५९००	हाजलदार आसामी १२ त्यांचा बांदा.
	{ ६१५४ - - ३ - - ००	७०००	शिपाई आसामी ११० त्यांचा बांदा.

पाचवें, चैत्रशुद्ध प्रतिपदेस, १०००० रुपये भांडवल करून, ह. ने व्यापार
आरंभिला; नंतर ज्येष्ठशुद्ध प्रतिपदेस त्या व्यापारांत १५००० रुपये भांडवल दे
ऊन क. सकंती मिळाला; नंतर भाद्रपद शुद्ध प्रतिपदेस त्याच व्यापारांत २००००
रुपये भांडवल देऊन, ग. सकंती झाला; या प्रमाणें तिघांचा सकंती व्यापारचा
लला; उदें वषांती हिशोब कर्तो १७७६५ रुपये नफा झाला, तो भाग प्रमाणें
तिघांस बरोबर बांटून दे.

	रु.	पा.	रें.
उत्तर.	{ ह. चा बांदा. ४५७४ - - - २ - - - ७१		११५
	{ क. चा बांदा. ५७१० - - - १ - - - २५		२६५
	{ ग. चा बांदा. ७४७१ - - - ३ - - - ०९		३२६

साहाबें, र. ल. व. या तिघांनी १ वर्ष सकंतीने व्यापार केला त्यांत आरं
भांच र. ने, २०० रुपये दिले, उदें चार महिनें जाऊन २०० रुपये दिले; तसें ल. ने

आरंभी १०० रूपये दिले. पुढें १ महिने गेल्यावर २०० रूपये दिले. नंतर दोन महिने गेल्यावर पुनः ४०० रूपये दिले. तसे वने आरंभी ६०० रूपये दिले. पुढें ९ महिने गेल्यावर १००० रूपये दिले. नंतर १ महिना गेल्यावर १००० रूपये माघारे घेतले. पात्र माणें वर्ष पुढें झाल्यानंतर हिशोबी १००० रूपये नफा झाला तो निघांस बरोबर वांटून दे.

	रु.	पा.	रु.	
उत्तर.	{ रत्ना बांदा. १०२	२०	२५	१३५
	{ लत्ता बांदा. २१०	१०	२	११५
	{ वत्ता बांदा १००	०	११	११५
				१३५

व्याज.

व्याज म्हणजे पैका उधार देणें किंवा धिरणें याजवर घडीचा नियम आहे. जो पैका उधार देतात किंवा धिरतात, त्यास मुद्दल म्हणतात. आणि व्याज ब मुद्दल यांचे बरेजिसे रास द्याणतात. व्याज शेकड्याप्रमाणें वर्षावर अथवा महिन्यावर किंवा टिक्सावर ठरवितात. परंतु बहुत करून वर्षावरच. त्यास व्याजाचा दर द्याणतात:-

जसें

जेव्हा व्याज शेकड्यास १ आहे, तेव्हा दर १ चा द्याणतात.

शेकड्यास ४ आहे - - - ४ चा द्याणतात.

शेकड्यास ५ आहे - - - ५ चा द्याणतात.

शेकड्यास ६ आहे - - - ६ चा द्याणतात.

व्याज दोन प्रकारचे आहे, सरळ आणि चक्रवाद

सरळ व्याज तेंच आहे जें झालें मुदतीचें दराप्रमाणें मुदलावर मात्र व्याज होतें. कोणतेही पैक्याचें व्याज. कोणतेही वेळें, मुद्दल पैका आणि त्याचा काळ यांसीं स मप्रमाणाने आहे. याजवरून त्यांचा हि साब करापास ही सुटील सामान्यरीति उत्पन्न झाली आहे.

जसें १०० रूपये व्याजाचे दरास आहें नसें कोणतेही सांगितले मुद्दल त्याच एक नियम काळाचें व्याजास होईल, आणि पुनः

जसें एक नियम काळ. कोणतेही सांगितले काळास आहे. तसें बर उत्पन्न झालेले एक नियम काळाचें व्याज सांगितले सर्व काळांचे व्याजास होईल.

अथवा, १ रुपयाचें एक नियम काळाचें व्याज घेऊन त्यानें सांगितले मुद्दल गुणावे. आणि तो गुणाकार उधार दिलेले किंवा धिरलेले पैक्याचे नियम काळाचें गुणावा. द्याणजे हा गुणाकार त्या काळाचें इच्छितें व्याज होईल.

पहा, जेव्हा काळा मध्य वर्षाचें कांहीं प्रवयव आहेत, जसें अर्धवर्ष, पाचवर्ष, महिना अथवा दिवस तेव्हां त्याचें व्याज वर्षाचें व्याज भागून होईल. अथवा त्रिशरीरितीनें होईल.

उदाहरणें.

प्रथम, मुद्दक. २२०५ चारों व्याज दरसात दर शेकडा रु. ४ प्रमाणें १४
षाचें व्याज किती रुपये होतील तें सांग.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 1000 \overline{) 8220} \\ \underline{8000} \\ 220 \\ \underline{200} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

क. पा. रे. एक वर्षाचें व्याज हें उत्तर.

दूसरे, मुहल रुपये ५४७७-२ पाबने याशी ब्याज दर साल दर शेक
डा रुपये ५५ प्रमाणे ३ वर्षों के ब्याज किंती रुपये होनी न तें सांग.

जसे १००:५०:५४७७.५०:

अथवा २०:१::५४७७:५:

२७ ५४७७५०० १२७३ ८७५ व्याज १ वर्षीचे.

४०

१४७

१४०

००७७

६०

१७५

१६०

१५०

१४०

१३०

१२०

११०

१००

९०

८०

७०

६०

५०

४०

३०

२०

१०

०

रु. ८२१ ६२५ तीन वर्षीचे.

४

पा २५९००

२. ५०००००

रु. पा. रे.
८२१ . . २ . . ५५ हेउत्तर.

निसरे. सहस्ररु. ११० पाशि आज दरमान दर शेकडा रु. ४ ३ प्र
माणे २ १/२ ७ मास १५ दिवस, पाचें व्याज किती रूपय होनील तें सांग.

जसे. १०० : ४५ :: २१५५ :

	१०५२	एकवर्षीये व्याज
	१०५३	कारवर्षीये.
	१०५४	साहायस.
	१०५५	एकवर्षीये.
	१०५६	नेत्रियादिकस

(१०३)

रु.	४३०	५५०
पा.	३	३६६
रे.	३०	०००

अथवा.

जसें. १६५.०४.५०.२५.

	३५
	१०३५
३६५०	३३६३.५०.०६ ४७२
	३१५०
	१७२५
	१४६०
	३६५०
	३३५५
	११०
	७३०
	२२०

रु.	पा.	रे.
४३५	२	३००

हेंउत्तर.

चवथें, मुद्दल ४५०० रुपये यांचें १ वर्षीचें व्याज दर शेंकडा दर साल ५ रु. प्रमाणें किती रु. होतील तें सांग.

पांचवें, मुद्दल ७१५६ रु. १ पा. यांचें १ वर्षीचें व्याज दर शेंकडा दर

साल ४ रु. २ पा. प्रमाणें किती रुपये होतील तें सांग. रु. ३३२. पा. १२ ३/४ हेंउत्तर.

साहाबें, मुद्दल ७२०० रुपयांचें ३ वर्षीचें व्याज दर शेंकडा दर साल ५ रुपये प्रमाणें किती होनात तें सांग. १०.०० रुपये हें उत्तर.

सातवें, मुद्दल ३५५० रु. २ पावले यांचें ४ वर्षीचें व्याज दर शेंकडा दर साल ४ रु. प्रमाणें किती होनात तें सांग. रु. ५६५. पा. ५. रे. ० हेंउत्तर.

आठवें, मुद्दल ३२२ रु. २ पा. ८० रे. यांचें दर शेंकडा दर साल ४ रु. १ पा. प्रमाणें किती रु. व्याज जाहालें तें सांग. रु. ५५. पा. ३. रे. ५५ हेंउत्तर.

नववें, मुद्दल १७०० रु. यांचें १ ३/४ दीड वर्षीचें व्याज दर शेंकडा दर साल ५ रु. प्रमाणें किती रु. होनात तें सांग. रु. १२३. पा. २. रे. ० हेंउत्तर.

दाहाबें, मुद्दल २००० रुपये यांचें व्याज दर शेंकडा दर साल ४ रु. प्रमाणें ३ पाव वर्षीचें किती रुपये होतील तें सांग. २० रुपये हेंउत्तर.

अकरावें, मुद्दल ३१०० रुपये यांचें ५ ३/४ वर्षीचें व्याज दर शेंकडा दर साल ३ रु. २ पा. प्रमाणें किती रुपये होनात तें सांग. रु. ५५५. पा. ३. रे. ० हेंउत्तर.

बारावें, मुद्दल १७६०० रु. यांचें दर शेंकडा दर साल ४ रु. २ पा. प्रमाणें ११७ दिवसांचें व्याज किती रु. होनात तें सांग. साल हाणजे ३६५ दिवस रु. ५५. पा. ३. रे. ० हेंउत्तर.

(१०५)

१०५

एकरूपपात्रीरास

१०५

१०२५

वर्ग.

१०२५

१२१५५६२५ चतुर्षान.

७२००

२४३१०१२५००

८५०८५४३५००

रु. ८७५१६५५

४

पा. २५८०

१००

रे. ५८०००

रु. पा. रे.

रास. ८७५१००२५८ हेउत्तर.

दुसरें. ५०० रुपये मुद्दल व्याज दरसाल दरशंकडा पांचोत्रा प्रमाणें वर्षें ५ झालीं रासकाय होईल तें सांग

रु. पा. रे.
उत्तर, ६३८०००५६

तिसरें. ५०० रुपये मुद्दल व्याज वर प्रमाणें वर्षें ५ झालीं. परंतु मुद्दल अर्ध अर्ध वर्षाची ते झां १० मुद्दली झाल्या त्याची रास काय होईल तें सांग.

रु. पा. रे.
उत्तर, ६४०००००१६१५००

चवथें. उदाहरण पूर्वाचिंच मुद्दल तीन महिन्याची. ते झां २० मुद्दली झाल्या व्याज काय होईल तें सांग.

रु. पा. रे.
उत्तर, ६४१००००००४४५२

पांचवें. १००० रुपये मुद्दल वर्षें ६ झालीं दरसाल दरशंकडा व्याज ४ रुपये प्रमाणें रास काय होईल तें सांग.

रु. पा. रे.
उत्तर, ४६८१००००३१४३

साहावें. ८१०० रुपये मुद्दल वर्षें २ १/२ झालीं दरसाल दरशंकडा व्याज ४ १/२ रुपये प्रमाणें मुद्दल १ वर्षाची रास काय होईल तें सांग.

रु. पा. रे.
उत्तर, १०५३०००००३५०३४०२४

सानवें २१०० रुपये मुद्दल वर्षें २ १/२ झालीं दरसाल दरशंकडा व्याज ५ रुपये प्रमाणें मुद्दल १/२ पाव वर्षाची रास काय होईल तें सांग.

रु. पा. रे.
उत्तर, २४१७०००००३०४३

मिश्रगणित.

मिश्रगणित म्हणजे वेगळाले जातीचे शब्द पदार्थ एकत्र मिश्रकेले, अर्थे कीं, त्या मिश्राची किंमत त्यांचे वेगळाले किंमतीचे बरो होईल, तो काढण्या

रीति दोन आहेत. एक मध्यमिश्रगणित आणि दुसरे स्यूद्धम मिश्रगणित.

मध्यमिश्रगणित.

मध्यमिश्रगणित म्हणजे मिश्रपदार्थांचा दर काढण्याची रीति आहे, जे कां प्रत्येक शुद्ध पदार्थांचे दर आणि परिमाणे संगितली आहेत.

रीति.

* प्रत्येक शुद्धपदार्थांची परिमाणे त्यांचे त्यांचे दरांनं वेगळा लीं गुणावी, नंतर या सर्व गुणाकारांची बेरीज आवी; आणि दुसरी शुद्धपदार्थांचे परिमाणाची बेरीज आवी; नंतर प्रथम बेरीज दुसरे बेरीजेने भागावी, म्हणजे गुणाकारांची बेरीज परिमाणाचे बेरीजेने भागावी, भागाकार येईल तो त्या मिश्रराशीचा इच्छिता दर परिमाण भाव होईल.

उदाहरणे.

प्रथम तीन जातींची शुद्ध साकर एकत्र मिळून मिश्रराशि झाली आहे. त्यांत ५० शेर दरशेरी १२ पैसे दरांची, तसें ४४ शेर दरशेरी २ पैसे दरांची आणि २६ शेर दरशेरी पैसे दरांची, असे वेगळाले भाव होते. आतां त्या मिश्रराशीस दरशेरी काय भाव होईल. आतां ५०, ४४, २६ हे परिमाण आहे, तर,

$$\begin{aligned} 50 + 12 &= 60 \\ 44 + 2 &= 46 \\ 26 + 0 &= 26 \\ 120 & 92 + 52 = 140 \end{aligned}$$

आणि १२, १, ० हा भाव आहे. उत्तर १० १/२ पैसे हा मिश्रराशीचा दरशेरी भाव.

दुसरे, एक चाहा पोंड ५ दरपोंडी भाव ७ शिल्लिंग, दुसरा चाहा पोंड २ दर शिल्लिंग ६ पेन्स, आणि तिसरा चाहा पोंड १४ १/२ दर ५ शिल्लिंग १० पेन्स प्रमाणे - असा तीन प्रकारचा एकत्र केला तर त्या मिश्रास दरपोंडी भाव काय होईल.

उत्तर, ६ शिल्लिंग १० १/२ पेन्स.

* प्रतिपाद्य रीतीची सत्यता बीजगणितापासून या उदाहरणप्रमाणे निघते.

अ, ब, क, हीं तीन असुर चिन्हे वस्तूची वेगळातीं परिमाणे दारवबायासघे.

आणि म, न, प, हीं तीन असुर चिन्हे त्यांचे प्रत्येकीं दर दारवबायासघे.

तर अम, बम, कम, हे त्या तीन राशींचे वेगळाले भाव आहेत.

आणि अम + बम + कम, ही त्या वेगळाले तीन राशींचे भावांची बेरीज आहे,

उतः अ + ब + क ही त्या तीन राशींचे वेगळाले परिमाणांची बेरीज आहे.

आतां जर र, सर्व मिश्रराशीचा भाव दारवबायासघे.

तर (अ + ब + क) + र, ही सर्व मिश्रराशीची किंमत होईल.

आज करिता (अ + ब + क) + र = अम + बम + कम.

आणि र = अम + बम + कम म्हणजे हीन राशि आहे.

अ + ब + क.

तिसरें, एक जातीचें तें लग्यात ४ दग्यातनीं भाव ४ शि. १० पेन्स दुसरें तें लग्यात ७ दर ५ शि. १ पेन्स
आणि तिसरें तें लग्यात ९ ३/४ दर ५ शि. ६ पेन्स प्रमाणे असें एकत्र केले तर
त्या मिश्रास दरग्यातनीं भाव काय होईल. उत्तर, ५ शि. ६ पेन्स.

चवथें, कोणी फड्यानें एक जातीचे गहुं १० बुशिल दर बुशिलां भाव ५
शि. ६ पेन्स दुसरें गहुं १० बुशिल दर ३ शि. ६ पेन्स, आणि तिसरें गहुं २० बुशिल
दर २ शि. ६ पेन्स प्रमाणे असें एकत्र केले तर त्या मिश्रास दर बुशिलां भाव काय होईल.
उत्तर, ३ शि. ६ पेन्स.

पांचवें, कोणी दुकानदारानें एक जातीचें पीठ बुशिल ३ दर बुशिलां
भाव ३ शि. ६ पेन्स तसें दुसरे जातीचें बुशिल ४ दर ५ शि. ६ पेन्स,
आणि तिसरे जातीचे बुशिल ५ दर ४ शि. ६ पेन्स प्रमाणे असें एकत्र क
रून विकूं लागला तर त्या मिश्रास पीठ बुशिलां काय भाव होईल.
उत्तर, ४ शि. ६ पेन्स.

साहाबें, सोने १० ओंस २२ क्यारेक्ट चांगलें, तसें १२ ३/४ ओंस २१ क्यारेक्ट
चांगलें, आणि १० ओंस १८ क्यारेक्ट चांगलें, असें एकत्र आदिलें तर त्या मिश्रा-
सो न्यास किती क्यारेक्ट चांगलें भाव लागेल. उत्तर, २० १/२ क्यारेक्ट चांगलें.

सानवें, रुपें, १ पोंड ० ओंस शब्द तसें ५ पोंड ० ओंस यांत.
१० ओंस शब्द आणि १ पोंड १० ओंस हीण असें एकत्र आदिलें तर त्या मि-
श्रास किती ओंस शब्द भाव लागेल. उत्तर, ७ १/२ ओंस शब्द.

आठवें, तीन जातींचें तूप मण ५, ९, १४, ३/४ दर मणीं भाव रुपये १०, ९, ८
८, ३/४ असें एकत्र केले त्या मिश्रास दर मणीं किती रुपये पडतील.
उत्तर, ९ रुपये.

नववें, तीन जातीचें दुध शेर ४, ७, १, ३/४ दर शेरों पेसे ६, ५, ४, ३/४

‡ जर १ ओंस अथवा दुसरे कोणतेही सोन्याचें परिमाण भर शब्द सोने आहे, तर त्याचे बरोबर २२ भाग
केडे, त्यांस मत्केक क्यारेक्ट म्हणतात, बसेरुप्याचे भागास ओंस म्हणतात परंतु बहुतेक वेळा सोनें काप्याचा
तु दुसरे हीन पातुर्गी मिश्र असतात, ज्यास हीण म्हणतात आणि या मिश्र सोन्यास इतकें क्यारेक्ट सोनें म्
णतात, जसे मिश्रांत शब्द सोनें आहे

जसे, जर २२ क्यारेक्ट शब्द सोनें आणि दोन क्यारेक्ट हीण एकत्र मिळविले तर या मिश्रास २२
क्यारेक्ट शब्द सोनें म्हणतात

जर मिश्रांत मिळाते वेगळ्याने पदार्थांत एक हीण दुसरे शब्द हांत मिळाला आहे, तर तो हीन पद
र्थांत अति बळकट म्हणून त्याचा मान शून्य गणितान

जसा काप्याचा भाव शून्य होतो, जे काप्याचा भाव शून्य होतो, तसा हीणाचा भाव शून्य होतो, जे
काप्याचें सोनें रुपें इत्यादिक उच्च पातुर्गी मिश्रित झाले.

असें एकत्र केले त्वा मिश्रास दरशरीं किती पैसे पडतील.

उत्तर, ४०० रु.

दाहावे, एक फड्यानें तीन प्रकासचे महुं मण १०, १८, २०, दरमणीरूपये ५, ३, २ या भावाचे एकत्र केलेतर त्या मिश्राशीस दरमणीं कितीरूपये पडतील.

उत्तर, ३ रूपये.

अकरावे, कोणी दुकान दारानें ३ जातीचे पौठ मण ३, ४, ५, दरमणीं रूपये ३, ३, ३ या दाराचें एकत्र केलेतर त्या मिश्रास दरमणीं कितीरूपये पडतील.

उत्तर, ३ रूपये.

बारावे, सोनें तोळे ७, १२, १७ त्याचे अनुक्रमे कस ९८, ९६, ९४ असें एकत्र आरिलें तर त्या मिश्रास कस काय लागेल.

उत्तर, ९५ कस.

तेरावे, सोनें तोळे २१, ३२, ३९ त्यास कस ९८, ९६, ९५, असें एकत्र आरिलें तर त्या मिश्रास कस काय लागेल.

उत्तर, ९६ कस.

सूत्रममिश्रगणित.

सूत्रममिश्रगणित म्हणजे अनेक सांगितले भावाचे अनेक शब्दपदार्थ एक व मिश्र केले. तर त्या मिश्रास सांगितला भावत्वावा, ते त्वां मिश्रकरायास कोणते भावाचे पदार्थ किती किती परिमाणानें घ्यावे. ते काढायाचीरीति आहे, हीरीति मध्य मिश्ररीतीचे उलट आहे, म्हणून याचा ताळा मध्य मिश्ररीतीनें निघतो.

प्रथमरीति⁺

+ सिद्धांत, उष्णभावा अधिक भावास जोडून आणि त्याचा प्रत्येकीं इच्छिते भावाशीं वजावाक्या त्या त्या भावासमोर सूत्रमामें लिहून जें परिमाण निघतें, तें असें आहे कीं उष्णभावाचे परिमाणावर जिनका नफा येतो तितकाच अधिक भावाचें परिमाणावर तोटा आहे. याजकरितां सर्वपरिमाणावर नफा तोटा होईल, तो बरोबर, हाच इच्छित भाव आहे. याचप्रमाणें अनेक शब्दपदार्थ मिश्र केले तरीही जाणावे.

यारीतीनें कितीही शब्दपदार्थ किती एक शब्द पदार्थाशीं जोडिले असतील म्हणजे सर्वदा ३ भावाहून उष्ण असतील ते अधिकारी जोडिले जातील, तरीही प्रत्येक सुगमाचा नफा तोटा पूर्वप्रमाणें बरोबर होईल, आणि याजकरितां सुगमाचा नफा तोटा बरोबर होईल. हें सिद्ध.

यारीतीपासून कळतें कीं या जातीचे प्रश्रांस अनेक उत्तरे निघतील कारण, एक उत्तर काढित्या नंतर इच्छे प्रमाणें हावीं तितकीं यारीतीनें निघतील, तीरीती, वेगळाले काढिले प

परिमाणांस २ किंवा ३ प्रथवा ४ इत्यादिकांनंशून किंवा भागून, याचें कारण उघड आहे. जर दोन शब्द पदार्थांनीं परिमाणें मध्यभावाशीं नफा तोटा बरोबर करितो. तर त्याचें दुपटीशींही किंवा तिपटीशींही, या प्रमाणें अनंत पट पयंत.

या जातीचे प्रश्रांस बीजगणित जाणणारं अनंततत्त्व म्हणतात, आणि ज्या पासून जिनकां उत्तरे निघतील तितकीं काढायाचा सिद्धांत बीजगणितरीतीनें कारितां येतो.

$$21 \left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 10 \\ 12 \\ 18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{array}$$

शब्द पदार्थांचे भाव एकाचवासी एकयेनील असेल हावे = २ इच्छिले मिश्रभावा हूनजे शब्द पदार्थांचेभाव उणेअसतील त्यांस प्रत्येकीं मिश्र भावाहून अधिक असतील त्याशीं अखंड रेखा करून जोडावे. आणि याच शीतीनें प्रत्येक अधिकस प्रत्येक उण्या शीं मिळवावे:- १ मिश्रभाव आणि प्रत्येक शब्दभाव यांच्या वजाबाक्या ह्यणजे अंत रेंतीं शब्दभावज्याशीं जसेमिळविलेआहेत, त्यांचे त्यांचेसमोरलिह्यावीं, नंतर एकच वजाबाकी त्या भावांचे समोर आलीतर तीच त्या राशीचे परिमाण होईल, आणि अनेक वजाबाक्या आल्यातर सांवी बेरीज त्या राशीचे परिमाणहोईल.

प्रत्येक उदाहरणाचा ताळा मध्यमिश्रशीतीनें निघतो.

उदाहरणं.

प्रथम, कोणीएकसावकार १६, १८, २२ रुपये खंडी असे तीन जातींचे चण वेगळाते कितीकिती परिमाणानें घ्यावे ह्यणजे मिश्रराशीस इच्छिला भाव पडेल.

रु. २०	{	१६	२ खंडी १६ चे भावाचे. तर $२ + १६ = १८$
		१८	२ खंडी १८ चे भावाचे. $२ + १८ = ३६$
		२२	$४ + २ = ६$ खंडी २२ चे भावाचे. $६ + २२ = १३२$
खंडी- १८ रु. २००			

यान्चाताळा मध्यमिश्रशीतीनें.

२, २, ६ खंडी हीं परिमाणें.

१६, १८, २२ रुपये हे भाव.

दुसरे, कोणीदुकानदार ४ आणि ६ रुपये मण असे दोन भावांचे तेल मिश्र करून ५ रुपये मण या भावानें विकयास इच्छितो. तर त्यानं मिश्रकरायास दोन जातींचे तेल प्रत्येकीं किती किती परिमाणानें घ्यावे.

उत्तर, १ खंडी मण किंवा शेर.

तिसरे, कोणीदुकानदार ४, ६, ११ पैसे शेर असे तीन भावांची साकर एकर मिश्र करून ७ पैसे शेर या भावानें विकयास इच्छितो तर त्यानं मिश्रकरायास प्रत्येक भावाची साकर किती किती परिमाणानें घ्यावी.

उत्तर, १ शेर किंवा मण किंवा खंडी.

चवथें, कोणीदुकानदार दर बुशिल २ शिल्लिंग ६ पै ३ शिल्लिंग ४ पै आणि ४ शिल्लिंग ८ पैस असे नार भावाचे गहुं एकत्र मिश्र करून दर बुशिल ३ शिल्लिंग १ पैस या भावानें विकयास इच्छितो, तर त्यानं मिश्रकरायास कोणकोणते गहुं किती किती परिमाणानें घ्यावे.

उत्तर, २ शिल्लिंग ६ पै यादराचे २ बु, ३ शिल्लिंग ८ पै यादराचे २ बु,

४ शिल्लिंग ८ पैचे ३ बु, आणि ४ शिल्लिंग ८ पै याचे ३ बुशिल.

पांचवे, कोणीसोवार, १६, १८, २१, २४ क्यारेक्ट् चांगलें या दसंचे सोनें एकत्र आद्ग मिश्रसोनें २१ क्यारेक्ट् चांगलें करायास इच्छितो तर त्यानें कोणकोण तें सोनें किती किती परिमाणानें घ्यावें.

उत्तर, १६ क्यारेक्ट् चें ३ भाग १८ चें २ भाग, २१ चें १ भाग, आणि २४ चें २ भाग.

साहावे, कोणी दुकानदार मध १२ रु. मण, राब १० रु. मण, काकवी १ रु. मण आणि पाणी ० रुपये मण, अशीं एकत्र मिश्रकरून त्या मिश्रास दरमणीं ८ रुपयांचा भाव व्हावा असें इच्छितो तर त्यानें प्रत्येक कायकाय परिमाणानें घ्यावीं.

उत्तर, मध १५ राब १५ काकवी ६ आणि पाणी ६ मण.

दुसरी रीति.

जेव्हां मिश्राचें परिमाण सांगितलें आहे, पूर्वी सांगितले जोडण्याचे शीती करून उत्तर काढावें नंतर या प्रमाणें प्रमाण राशी कराव्या, जशी परिमाणांची बेरीज सांगितले परिमाणास आहे : : तसें जोडण्याचे शीतीनें काढिलेले शब्द पदार्थ : प्रत्येकांचे इच्छिले परिमाणास होतील.

प्रथम, १५, १०, १८, २२ क्यारेक्ट् चांगलें एकत्र आढायाचें आहे, असें कीं, तें मिश्र ४० तोळे २० क्यारेक्ट् चांगलें होईल, तर वेगळ्यां त्या त्या जातीचीं किती तोळे घ्यावें

आतां २०	{	१५	२	जसें १६ : ४० :: २ : ५
		१०	२	१६ : ४० :: २ : ५
		१८	२	१६ : ४० :: २ : ५
		२२	५ + ३ + २ = १०	१६ : ४० :: २ : २५

उत्तर, १५ चें ५, १० चें ५, आणि २२ चे २५, तोळे. ‡

‡: पास्वडीं धातूचे स्वभावावर अनेक पत्र सांगता येतील. परंतु त्यांतून बहुचमत्कारीक एकत्र घेऊन हेरो या नांवें सैराकुसचा पाच्छाई होता. त्यानें, सगळ्या शब्द सोन्याचा मुकुट सोनारामका याम सांगितला, नंतर तो स्वयें करून आणि त्यावर त्यांत काही रुपें केंद्रांतों मिश्र केले असें नजरेस आले. परंतु तें किती याचा निश्चय व्हावा म्हणून आर्कमीटीज या नांवें एक चतुरस्र अतिप्रसिद्ध तोही नेथें होता. तेव्हा त्या मुकुटातील हिणाचें परिमाण करायास तो त्या चतुरस्र राजवळीकडे उठें.

त्यानें एक शब्द सोन्याची एक तोळें किंवा रुपयाची अशा दोन मरींच आहूती करून त्या पाण्यानें तोंड पडेंत भरिलेले पात्रांत पड्यानें बुजविल्या, नंतर त्या आहूतीच्या योगें पात्रांतून बाहेर पडले पाण्याची तोळें केल्या पासून त्या मरींच आहूतीचें स्वभार त्यास धिंदित झाडे म्हणजे या पासून आणि त्या प्रत्येकांचे सांगितले वजना पासून त्या मुकुटांत शब्द सोनें आणि हीण किती होतें त्याचें परिमाण काढितें आहे.

आतां कल्पना कर कीं, त्या मरींच आहूति व मुकुट यांचें प्रत्येक वजन १० शेर आहे आणि शब्द रुपें किंवा तांबें यांचें मरींचा हति मुकुट मुकुटें पात्रांतून बाहेर पडले पाणी १२ शेर आणि शब्द सोन्याचें मरींची हति मुकुट मुकुटें पात्रांतून बाहेर पडले पाणी ५२ शेर, आणि त्या मिश्र सोन्याचे मुकुटासुद्धें पात्रांतून बा

दुसरे, ४, ५, ६, ८ रुपये मण यन्वार भावांचे तांदुळ एकत्र मिश्र करून ते २० मण ४ रुपयांचे भावाने विक्रीसाठी इच्छितो, तर ते वेगळे वेगळे किती किती मण आचे.

उत्तर, ४ चे २३, ५ चे २३, ६ चे २३ आणि ८ चे १३ मण.

तिसरीरीति.

जेव्हा एक शब्द पदार्थांचे परिमाण असुन असावे हाणून सांगितले आहे, तर सर्व शीती प्रमाणे प्रत्येक पदार्थांचे भावांच्या दृढभावाशी वजाबाकी कराव्या. नंतर या प्रमाणे राशी कराव्या, जसे सांगितले परिमाणाचे शब्द पदार्थांची वजाबाकी दुसरे वेगळे वेगळे वजाबाकीस होतें : : तसे सांगितले परिमाण : वेगळे वेगळे इच्छिते परिमाणास होईल.

उदाहरण.

प्रथम, दर ग्यालून ४ शिल्लिंग, दर ग्यालून ५ शिल्लिंग दर ग्यालून ५ शिल्लिंग ६ पेन्स, आणि दर ग्यालून ६ शिल्लिंग असे ४ जातीचे पदार्थ मिश्र करायचे त्यांत प्रथम ४ शिल्लिंग दरचा पदार्थ ३ ग्यालून घालणें आहे, आणि मिश्रास दर ग्यालूनी ५ शिल्लिंग ४ पेन्स असा भाव व्हावा तर प्रत्येकांचे परिमाण किती किती आचें.

आतां ६४	{	४०	$२ + ८ = १०$	तर जसे १० : १० :: ३, ३ ग्या.
		६०	$२ + ८ = १०$	१० : १० :: ३, ३ ग्या.
		६६	$१६ + ४ = २०$	१० : २० :: १, १ ग्या.
		७२	$१६ + ४ = २०$	१० : २० :: १, १ ग्या.

उत्तर, ५ शिल्लिंगचे २ ग्यालून, ५ शिल्लिंग ६ पेन्सचे ६ ग्यालून, ६ शिल्लिंगचे ६ ग्यालून.

दुसरे, कोणी एक वाणी १२, १०, ६, ४ रुपये रवंडी दराचे दाणे एकत्र मिश्र करीत इच्छितो, परंतु त्यांत शेवटील ४ रुपये रवंडी दराचे २० रवंडी घालायचे आहे त, आणि न्यामिश्रास ८ रुपये रवंडी असा भाव व्हावा तर त्याने प्रत्येक भावांनी किती किती आचें.

उत्तर, ४ रुपयांचे भावाचे २० रवंडी, ६ रु. चे १० रवं, १० रु. चे १० रवं, १२ रु. चे २० रवं.

हो पडले पाणी ६४ शेर, तर त्यामुळ सोनील शब्द सोने आणि हाण यांचे प्रत्येक परिमाण काय होईल
आतां केवळ तांचे किंवा रुपे याचा भाव १२ शब्द सोन्याचा ५२ आणि मिश्राचा ६४ आहे.
याज करितां ६४ : १२ :: १२ : ३. शेर तांचे.
ज करितां शीती प्रमाणे ४० : १० :: १२ : ३. शेर तांचे.
४० : १० :: २० : ५. शेर शब्द सोने हे उत्तर.

● अनेक पदार्थ असुन, असुन परिमाणाचे असावे असे सांगितले असेन तरी ही याचरीतीने एकाचें परिमाण काढून मग दुसऱ्याचें काढावे, अशा असुन सर्वोनी परिमाणे निघतील. यांत दुसरी आणि तिसरी यादींनी आधारासांगण्याने अगत्य नाहीं कारण, या दोनही प्रथम शीतीपासूनच निघवतां त्याच्या आर ह्या शीतरीतीला श्रेष्ठ आहे.

तिसरे, १५, १७, १८, २२ क्यारेकर चांगलें सोनें आदून मिश्रक रायास इच्छि तो, परंतु, त्यांत तिसरे १० क्यारेकरचें ५ तोळे घालणें आणि मिश्र २० क्यारेकर चांगलें घा वें. तर बाकीचें किती किती तोळे घ्यावें. उत्तर, १५ चें ५ तोळे, १७ चें ५ तोळे, १८ चें २५ तोळे.

इष्टराशि.

इष्टराशि म्हणजे किती एक प्रश्नांचीं उत्तरे उपड करायची एकरीति आहे कीं, ज्या प्रश्नांचीं उत्तरे साधारण पूर्वरीतीं करून उपड होत नाहींत, कोणे वेळेस यारीतीस मिश्र्याय नोडून ह्मणतात, कारण, सत्य संख्ये प्रमाणें मनः कल्पित मिश्र्या संख्यानीं काम के-
ल्या पासून शेषां सत्य संख्या उत्पन्न होते, कोणी यारीतीस चुक शोध ह्मणतात, का-
रण, मिश्र्या संख्यांचे तपशीलानें शोध करितात, आणि चुक मिळविल्या पासून सत्य
संख्या उत्पन्न होते.

ती एकेरी आणि दुहेरी या भेदे करून दोन प्रकारची आहे.

एकेरी इष्टराशि.

एकेरी इष्टराशि तीच होय कीं जी पासून एकच मिश्र्या संख्येचे साहाय्यानें प्रश्ना-
चें उत्तर उपड मिळते जें उत्तर त्याचे मिश्र्या संख्येशीं प्रमाणांत आहे, ते प्रश्न एकेरी इ-
ष्ट राशींनील होत, म्हणजे असें, इच्छिले संख्येस दुसरे सांगितले संख्येनें गुणाय-
चें किंवा भागायाचें आहे, अथवा, जेव्हा इच्छिली संख्या तिणे तीच अथवा तिचे
हर कोणते भागांनीं किती एक सांगितल्यावेळां अधिक किंवा उणी करायची आहे.

रीति.

इच्छिली संख्या काढावा करितां कोणतीही संख्या घ्यावी, आणि प्रश्नांत सांगि-
तल्या प्रमाणें तिशीं काम करावें, नंतर या प्रमाणें प्रमाण राशी करायची. जसें मिश्र्या संख्ये-
चें उत्पन्न : त्या मिश्र्या संख्येस आहे : : तसें प्रश्नांनील उत्पन्न : त्याचे इच्छिले स-
त्य संख्येस होईल.††

प्रथम, एक मनुष्यानें आपले दव्याचा ६ आणि ६ रक्क केला नंतर पाहता तो
तों ६०० रुपये बाकी राहिले, तेव्हां त्याजवर पहिलें द्य किती होतें.

पहिलें द्य १२०० रुपये अशी मिश्र्या संख्या ये.

†† पाशीतीचें कारण उपड आहे कीं, उत्पन्नें आपले संख्यांशीं प्रमाणांत आहेत.

जसें नः अः अः नः नः अथवा अः अः अः अः

किंवा अः अः इत्यादि अः अः अः अः आणि इत्यादि.

(११३)

आतां १२०० चा $\frac{1}{2}$ = ६००

आणि १२०० चा $\frac{1}{3}$ = ४००

३००

१२००

१५००

बाकी.

जसे, ५०० : १२०० :: ६०० : १४४० होइ चिती राशि हें उत्तर.

याचा ताळा.

१४४० चा $\frac{1}{2}$ = ७२०

१४४० चा $\frac{1}{3}$ = ४८०

= १२००

१४४०

६००

ही बाकी प्रमाणे आहे.

दुसरे, ती संख्या काय आहे जी १ यांना गुणून तागुणाकार ६ यांनी भागिला असतां भागाकार २१ येईल.

तिसरे, ती संख्या काय आहे जी जीनिचे अधोने, तृतीयांशाने आणि चतुर्थीशाने युक्त केली असतां ७५ बेरीज होईल. उत्तर, १८०

चवथे, एकसदारांने आपले फौजेचा $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{1}{3}$ क. हीस पाठविला असतां तब्बवर १००० मनुष्ये राहिलां तेव्हां त्या फौजेत सर्वमनुष्ये किती होती. उत्तर, ३६०० मनुष्ये.

पांचवे, कोणी एक गृहस्थानें भिकाऱ्यास ५० पैसे वांटिले त्यांत प्रतीकल्या, उरुषास ६ बायकोस ४ आणि पोरसास २ याप्रमाणें आणि त्यांत बायका पुरुषांचे दुप्पट, आणि पोरें बायकांचे त्रिप्पट अशीं होती तेव्हां पुरुष, बायका आणि पोरें अशीं त्या जमावांत किती किती होती.

उत्तर, पुरुष २ बायका ४ आणि पोरें १२

साहाये, दोघे भलेमनुष्य मार्गांत गोष्टी करित चालिले होते. त्यांत एकां दुसऱ्यास विचारिले कीं, तुझ्यास वय किती आहे. तेव्हां त्याने उत्तर केले कीं माझे वयाचे वर्षाचे $\frac{1}{2}$ सातानां गुणिले आणि त्या गुणाकारांत त्याच वर्षाचे $\frac{1}{3}$ मिळविलेतर २१९ होताना, तेव्हां त्याचे वयाची किती वर्षे आहेत.

उत्तर, ४५ वर्षे,

दुहेरी इष्ट राशि.

दुहेरी इष्ट राशी म्हणजे किती एक प्रश्नांची उत्तरे दोन मिथ्या संख्यांचे साहाय्याने उघड करायचीरीति.

दुहेरी इष्टराशीत असे प्रश्न येतात की, ज्यांची उत्तरे सत्यसंख्या इष्टराशी
 ०ीं प्रमाणानत नाहीत, जसे याप्रमाण, ज्यांत इच्छिलीसंख्या त्या संख्येचा भाग
 किंवा समष्टुणाकार यांतून एक प्रकाराने वाढविली किंवा सांगितले संख्येनेउ
 णावेली, जी सांगितली संख्या इच्छिले संख्येचा कोणता भाग आहे हे वाउक नाही.

पथमरीतिः*

सुमारानं कमाचेउपयोगीदोनमिथ्या संख्याध्याव्या, आणि त्याशी प्रश्नां
 नैसर्गिकताप्रमाणे वेगळ्याही एकेरीरीती प्रमाणे कामे करावी, नंतर पाहोवें की, या दोन
 संख्या पासून जी दोन उत्पन्न होतात त्यांत आणि प्रभास किती भेद आहे, याचे
 दास अंतर हाणतात. ते अंतर अधिक किंवा उणें भसेल त्या प्रमाणें त्यास (+) कृण (-) चि.

नंतर ती दोन अंतरेणुणावीं अशा कीं दुसरे अंतरानें प्रथम संख्या गुणिली जाईल, आणि प्रथम अंतरानें दुसरी संख्या तेव्हां.

जर अंतरांचीचिन्हें सरूप आहेत, तर वरचे गुणाकारांची वजाबाकी त्या अंतरांचे वजाबाकीने भागावी, भागाकार येईल तो उत्तर होईल.

परंतु अंतरांचीं चिन्हे विरूप आहेत, तर उत्तराकरितां बगचे गुणाकारां-

॥ बिह्वान यारीतीस आग्रयहा आहंकी, प्रथम अंतरदुसरे भेनरास आहे. जशी प्रथममिथ्या संख्या आणि प्रथम सत्यसंख्या पांची वजा बाकी, दुसरी मिथ्यासंख्या आणि दुसरी सत्यसंख्या यांचे व जाबाकीस आहे. जेव्हा अशा प्रमाणात नाही, तेव्हा यारीतीने उजर बरोबर काढितां येत नाही. ही रीति रवरी आहे असें पूर्वप्राप्त्यपावरून दारवचना.

अ, आणि ब, हीं दोन अससर्बिनें पेनले संख्यांची असतीत. तसें आ आणि वा हांल्यांनीं प्रश्नाचे संकेत प्रमाणें उत्तरे असतीत. तसें र आणि स हीं त्यांनीं अक्षरे असतील, म्हणजे न हें संकेताचें सत्यउत्तरन याशीं वेगळा त्या आ आणि वा याच्या वजाबाक्या र आणि स असतील, आणि इ संख्यादारवाक्यास ह्य पेनला म्हणजे शब्दोत्तरन होईल.

नेहान्-आ-र आगिन-वा-स अथवा वा-आ-र-स आतां ज्यांस सारीतीन्-वा आश्रय
 आहे, त्या प्रमाणा प्रमाणें रः सः :: स-अ-स-ब अंत्यपदे आगिमध्यपदे गणून म्हणजे
 रस-रब-सस-स अनंतर स्थळांतरानें रस-सस-रब-स अ. भागाकारानें स-र-स अ. ही
 इच्छिता संख्या आहे. म्हणजे हीरीति नेह आहे कीं, जे झांढे न्ही अंतरे व मी पडतात.

जर दोन्ही उत्पन्ने सत्य उत्पन्नाहून अधिक असतील, म्हणजे आ/आणि बा/ही दोन्ही न, हून अधिक असतील, तर न-आ=-र आणि न-बा=-स, म्हणजे र आणि स, हीं दोन हीं (-) व्यंग्य आहेत. याजकरितां-र:-स::स्-अ:स्; ब, परंतु-र:-स::+र:+स. याजकरितां-स::स्-अ:स्-ब, आणि सर्वेबाकी पूर्व प्रकाराप्रमाणे बरोबर निघेव.

परंतु जर एक उत्पन्न आ कमी आणि दुसरे उत्पन्न बा अधिक असेल अशा एक अं नरवर (+) धन आणि दुसरे अंतर स (-) असेल तर पूर्वेप्रमाणे प्रमाण राशी करून मूली करणा महे रुप होईल. $S = \frac{r+b+s}{r+s}$ आणि ही रीति अनर विरूप आहेत ते उपायोगी होय.

ची बेरीज त्याचअंतराचे बेरजेने भागावी.

दीप, दोन अंतरांची निव्हे धनकिंवा कृण आहेत तर तीं सरूपहोन,
एकधन आणि एककृण अशीं आहेत तर तीं विरूपहोन.

उदाहरणे.

प्रथम, ती संख्या काय आहे की, जी ६ यांनी गुणून त्या गुणाकारांत
१८ मिळविले आणि ती बेरीज ९ यांनी भागिली, तर भागाकार २० होईल.
आतां १८ आणि २० या दोन मिथ्या संख्या सत्यसारख्या मानून घे.

प्रथम संख्या.

$$\begin{array}{r}
 १८ \\
 ६ \\
 \hline
 १०८ \\
 १८ \\
 \hline
 १२६ \\
 १४ \text{ उत्पन्ने } \\
 २० \text{ सांगितले उत्पन्न } \\
 \hline
 - ६ \text{ अंतर } \\
 \hline
 ३० \\
 १०० \\
 \hline
 ३६
 \end{array}$$

८) ३१६ गुणाकाराची बेरीज.
२७ इच्छित संख्या, ते उत्तर.

दुसरी संख्या.

$$\begin{array}{r}
 ३० \\
 ६ \\
 \hline
 १८० \\
 १८ \\
 \hline
 १९८० \\
 ३३ \\
 २० \\
 \hline
 + २ \\
 \hline
 १८ \\
 \hline
 ३६
 \end{array}$$

ताळा.

$$\begin{array}{r}
 ३० \\
 ६ \\
 \hline
 १६२ \\
 १८ \\
 \hline
 १८० \\
 २०
 \end{array}$$

दुसरी रीति.

गणिताचा तपशील करून इच्छित संख्येचे अति सन्निध दोन संख्या का
दून त्याशी प्रश्नाचे संकेता प्रमाणे वेगळा तीं कामे करावीं. नंतर जी उत्पन्न होतील, तीं
अधिक उणी पाहून त्यांस (+) धन (-) कृणचिन्हें अनुक्रमे करावीं.

या अति सन्निध संख्यांची बजाबाकी त्यांनील एक अंतरानें गुणावी आणि ना
गुणाकार त्या अंतरांचे कजाबाकीने भागावा. जर तीं अंतरे सरूप आहेत आणि वि-
रूप आहेत, तर त्याचे बेरजेने भागावा अथवा या प्रमाणे प्रमाण राशी कराव्या.
जशी दोन अंतरांची बजाबाकी : किंवा दोन उत्पन्नांची बजाबाकी : दोन पंतल अति
सन्निध संख्यांचे बजाबाकीस आहे : : तसें कोणतेंही अंतर : ते आपले संख्येप्रमाणे

नंतर तो भागाकार किंवा ते दृष्टाफळ आपली संख्या अधिक असल्यास त्यांतून व
जाकरावे आणि आपली संख्या उणी असल्यास त्यांनी मळवावे. म्हणजे इच्छित संख्या
उत्पन्न होईल.

उदाहरणे.

प्रथम, पर उदाहरण आहे तेच पारीतीने करावे.

प्रथमसंख्या.

३८

-६- - अंतरे- - ४२

३० या अधिकसंख्येनून.

३ वजाकरून

२० बाकी इच्छितीसंख्या. हें उत्तर.

अथवा, २२-१४=३०-१८:: किंवा ८:१२:: २:३. पूर्वप्रमाणे ३० या संख्येचे श

दुसरे, बाप आणि नेंक हे दोघे बोलत होते, तेथे नेंकानें दापास विचारितें,

दाबा तुझास वय काय आहे, बाप सांगता, अरे बाबा आज तुझे वय माझे वयाचा ३
आहे परंतु ५ वर्षां पूर्वीं तुझे वय माझे वयाचा ३ होताने झाल्या दोघांनीं वयें काय आ

उत्तर, १५ आणि ४५.

तिसरे, कोणी गृहस्थाने प्रतिदिवशीं १३ प्रमाणे २० दिवसांचे करारांन
एक कारागीर ठेविला, त्याची करारी येणे प्रमाणे, तो कारागीर ज्या दिवशीं रवेचे लुट किं
वागेर हजीर होईल त्या दिवसाचा त्या पासून उठला रुपया ३ दंड घ्यावा. पुढें करारी
चे दिवस पुढे झाल्यानंतर त्या गृहस्थाकडे त्या कारागिराचे रुपये २२ ठरविले, ते
त्याने किती दिवस काम केले.

उत्तर, १६ दिवस.

चवथें, अ, आणि ब, हे दोघे बरोबर समान रुपय घेऊन जुगार खेळा
वयास बसले तो प्रथमच अ, रुपये २० जिंकिला, नंतर जवळचे सर्व पैसांचे ३
हारला, शेवटीं रवेचे संपून उठले, ते सगळीं वजे जवळ अचेचोपर पैका झाला,
तेव्हां प्रत्येकाजवळ आरंभी किती रुपये होते (उत्तर, १०० रुपये.

पांचवें, अ, आणि ब या दोघांचा आदाय बरोबर आहे, त्यांन अ, आ
पले आदायाचा ६ संधर्ह करितो, परंतु ब प्रतिवर्षीं अ पेक्षा ५०० रुपये अधि
करवचें करितो, आणि ४ वर्षांनंतर बला १००० रुपये कर्ज झालें, ते व्हां प्रतिव
र्षीं एकेकाचा आदाय व रक्क किती तो सांग.

उत्तर, १२५० प्रत्येकाचा आदाय. आणि अचा रक्क प्रतिवर्षीं १००० रु.
बला १५०० रुपये.

गणितांतील कामाचे प्रश्न.

प्रथम, तोफेचे गोळाचा मोठा वेग काळमानाने १ सेकंदत ३०० फुट आहे तर
त्यामागाने पृथ्वी पासून सरलेला गोळा सूर्य मंडळी पोचण्यास किती वेळ लागेल, सूर्य

॥ हा प्रश्न पूर्वे प्राथम्य सोडितला त्या प्रमाणें : स :: स-अ : स-ब. याज करिता भागाकारानें र स ::
ब-अ : स-ब. परंतु ब-अ = र स याज करिता वा-आ : स ; ब-अ : स-ब अथवा वा-आ-ब-
अ :: स : स-ब. म्हणजे ही दुसरी रीति आहे.

यं आणि एन्ही यांचे मध्ये अंतर १.....मैल असे कन्विलें आणि एक वर्ष-
म्हणजे ३६५ दिवस ६अवर.
उत्तर. ८ $\frac{700}{9384}$ वर्ष.

दसरा, तोफेचा गोळा बाहेर पडतो ते समयी त्याचवेग १ सेकंदांत १५५ फुट जाण्याचा असतो आणि सूर्याचा प्रकाश सूर्यापासून धृव्यावर पोचण्यास $9\frac{1}{2}$ मिनिटे लागतात, तेव्हा प्रकाशाचे वेगाचे त्या तोफेचे गोक्याचे वेगाशी गुणोत्तर काय आहे. उत्तर, जसे $902222\frac{2}{3} : 1$ एकाला.

निसरा, एकमिन्युट ७० पावले चलते. पाउल स्वर्णजे २० इंच तर
या भावने एक प्रवरांत किती चालेल. उत्तर. १ $\frac{113}{133}$ मैल.

चवथा, एक सेकंदांत २ पावले अथवा एक मित्युदांत १२० पावले चालता. पाउल स्पणजे २० इंच. तर या भावांनी कोणी शिपाई कुच करून चालते समई १ अवरांत किती चालेल. आणि एक राणे २० मैल दूर आहे. तेथें त्याच शिपायास पोचण्यास या भावांनी किती वेळ लागेल. मार्गी विस्थांतीस एक भवर अवकाश दिला आहे

उत्तर. ३३ मैल १ अवरांत चालेल.

उत्तर, ३३, मैल १ अवरान्तचालेल.

आणि पु. मि. १ वेळ लागेल.

पांचवा, ७०० यार्ड लांबाची एक भिंत २० टिचसांत मिळू कराया-
चा संकेत, त्यांत १२ माणसांनी ११ टिचस काम केले. तीं ती भिंत २२० यार्ड
मात्र सिद्ध झाली. तेव्हां या भावानें काम चालविणें तत् पूर्व संकेता प्रमाणें भिंत
पुरी होण्यास पूर्व संख्येहून किती माणसें अधिक असावीं.

उत्तर, ४ माणसेंपूर्वसंख्याहूनअधिक.

साहाय्य. ५.००००००० रूपये एकाशीं एक लाखम एकापुढें एक-
असं भूमीचरे एक सरळ रेंघंत देखिले. मनांत आणकीं. एकेक रुपयाच्या व्यास
एकेक डंच आहे. तर ती रुपयांची ओळ किती लांब होईल.

उत्तर, ७८११...७२८. २...८.

ज्ञानवा. एक शेंताचे भोंवनाबांध आहं, त्याची परिमिती ५३६ यार्ड आहं. आणि त्या शेंताचे समोरासमोरचे वाजूंवर अ, आणि ब, हे दोघे मनुष्य उभे आहेत त्यांत अ एक मिन्सुरांत ११ यार्ड चालतो, आणि ब तीन मिन्सुरांत ३४ यार्ड चालतो, ते दोघे शेंतास सव्य प्रदक्षिणा करायास उभे होतं तें थुन एक का-
 दांच निपाने. तर लवकर चालणाराच्या किती प्रदक्षिणा होतील. तें ह्या तुडील
 मट चालणारास मिळवील.

उत्तर. १७ प्रदक्षिणा.

उत्तर, १७ प्रदक्षिणा.

आठवा, कोणी एकला मनुष्य अथ १२ दिवसांत जें काम करितो आणि

नेंच काम दुसरा मनुष्य व एकदा १४ दिवसांत करितो जर नेंच काम नेदोषेमि
बून करितीत तर किती दिवस लागतील. उत्तर, ६ $\frac{१}{११}$ दिवस.

नववा. एक तांब्याचे रवाणींत एकत्वाभाग $\frac{३}{४}$ आहेत, त्यानें त्या
तून $\frac{३}{४}$ एक मनुष्यास १८००० रुपयांस विकले. तेव्हां त्या सगळे रवाणीचें
मोल काय होईल. उत्तर, ४०००० रुपये.

दाहावा. कोणी एक मनुष्य आपले मासीचे एकचतुर्थ अंशाहून २०
रुपये अधिक रक्कच करितो. तथापि त्याचें जवळ मासीचे अपोहून ३० रुप.
अधिक संग्रह राहतो. तेव्हां त्याची सर्व मासी किती. (उत्तर २००० रुप.)

अकरावा. घाल्याळांतील मित्युदकांदा आणि अवर कांदा हे दोन्ही
१२ अवराचे स्थानी एकत्र होतें, ते पुनः पुढें केव्हां एकत्र होतील.

उत्तर, १३ अवर किंवा अ. मि. से.

बारावा. कोणी एव. मनुष्याची मासी एक वर्षाची १५००० रुपये आहे
त, आणि एक आठवड्यांत ०१० रुपये रक्कच करितो. तेव्हां वर्षांनी किती रु
पये संग्रह किंवा कर्ज होईल, एथें वर्ष विलायतीमागाचें.

उत्तर, ४००० रुपये संग्रह.

तेरावा. कोणी एक मनुष्यानें दरपेशास २ प्रमाणें १८० आंबे विक
त घेतले पुनः दरपेशास ३ प्रमाणें दुसरे १८० आंबे विकत घेतले. नंतर दो
न पेशांचे ५ प्रमाणें ते सर्व आंबे विकले. तेव्हां मुदलांत नफा किंवा तोरा कि
ती झालानो सांग. (उत्तर, ६ पैसे तोरा झाला.)

चवदावा. दर आसामीस दर दिवशीं दोन शेर प्रमाणें १५०० मनु
ष्यांस १२ आठवडे पर्यंत पुरेल इतकें अन्न कोणीत आहे. नेंच अन्न दर आ
सामीस दर दिवशीं १ $\frac{१}{२}$ शेर प्रमाणे केल्यास २० आठवडे पर्यंत किती मनुष्या
स पुरेल. (उत्तर, १२०० मनुष्यास.)

पंधरावा. लंडन शहराचे भवोन्नतांत पृथ्वीचे मोवती त्या स्थळीं
भवोन्नत पारघाची लांबी १५५५० मैल आहे, आणि पृथ्वी आपले अंसा
वर २३ अवर ५६ मित्युदांत पश्चिमेकडून पूर्वेकडे वटक्षिण एकवार फिर
ते, तेव्हां या भागाचें एक अवरान्त फिरण्याचें गमन किती आहेतें सांग.

उत्तर, ६४० $\frac{२३५६}{३६०}$ मैल.

सोळावा. कोणी मनुष्य अंतकाळीं आपले सर्व इच्छास देउन
आपण घरणीवला नंतर त्या पुत्राचें त्या इच्छाचा $\frac{३}{४}$ भाग मिळ्यांत रक्कच

केला. नंतर बाकी राहिले इत्याचे ३ बारा माहिन्यांत उपजीविकेस खर्च करून हिंसा
बपावतो तो ८२०० रु. बाकी राहिले. तेव्हा सर्व इष्ट किती होतें तें सांग.

उत्तर. १९१३३. १. ३२ मगलेश.

सत्त्वावा, एकाकिल्यास शत्रूने फोंजेचा वेढा दिला होमा त्या किल्यांत १००० मनुष्य होते, त्यांस भक्षाय्यास प्रीतिदिवशीं प्रति मनुष्यास २ शेर प्रमाणें आठवडे पर्यंत पुरेता इतकें अन्नसंग्रहणें होतें, तेच समयीं त्याचे कुमकेस १०० मनुष्य किल्यांत आले, परंतु वेढा उठवाया जोगती कुमक घेण्यास आठवड्यांचा अवकाश आहे, तेव्हां तेच अन्न त्या सर्वांस तेथपर्यंत पुरविणें प्राप्त ते व्हांदर मनुष्यास दरदिवशीं किती शेर प्रमाणें द्यावें तें सांग.

उत्तर. ३ $\frac{1}{2}$ पावशेर.

अठरावा, कोणीएक मनुष्यानें आपले अंतकाडीं धाकरे पुत्रास ८४०००
 रुपये दिले. हे बडील पुत्रास जें द्रव्य दिलें त्याचे $\frac{1}{2}$ होतात, तेव्हां त्या मनुष्याचे सर्व
 द्रव्य कितीतें सांग. उत्तर. १०२००० सर्वद्रव्य.

उत्तर, १०२००० सर्वद्वय.

एकुणीसावा, कोणी एकमुन्यघड्याचाचें काव्यावर दृष्टी ठेऊन बसला होता, त्यास दुसऱ्यानें विचारिलें. कितीं अगर झाले, तेव्हां तो म्हणतो. पांचापासून साहा इतरांनां आहं. ते समयी पुनः त्यानें विचारिलें कीं. निश्चय सांग. त्यास त्यानें उत्तर केले. जेयासमयीं अगर कांरा आणिमि त्पुरका राहो दोनी एकत्र आहेत, याचरून समज.

एकअवरांत अवर कांदा पूर्ण परिघाचा $\frac{1}{2}$ चालतो आणि मिन्थुर-
कांदा एकअवरांत सगळ्या परिघ अथवा $\frac{1}{2}$ चालतो. (उत्तर : १० मिन्थुर.)

उत्तरः ५५ मिन्पुतः

विंसावा. २० मनुष्ये १२ विंसांत जें काम करिनील त्याच तें परका
म पूर्ववेळेचे देत करणें तर विंशें असावीं. (उत्तर २०० मनुष्य.

(उत्तर ३०० मनुष्य)

एकविंशत्वा. कोणी एक मनुष्याने मरण समयी आपले इच्छाच्या
एक पुत्रास देऊन जे बाकी राहिले त्याचे दुसरे पुत्रास दिले आणि जे बा-
की राहिले ते बायकोस दिले. पुढे पाहता त्या दान पुत्राचे वांट्याची वजाबाकी
५१२३ रुपये १ पावला ३३ देस इतकी आहे. नन्हां बायकोस किती पावले ते
सांग.

उत्तर. रु. पा. क.

षाविंसाद्या कोणी मनुष्याने मरण समयी आपलं दान्याचं १२ एक पुत्रास आणि नाकीसहितं ते दुसरे पुत्रास ७० शेणें देहून मरण पावला. पुढें ते दोघेयुत्र दान्याचें देहून घेऊं लागले. तों एकास दुसऱ्या पेक्षां १२००० रु. अधिक आले ते

अर्द्धावसावा, दोषग्रहस्थाने मरणसमयी आपले द्रव्य, भक्त, या तीनपु
 भासते दनदिते, ते असेकीजे व्हावना ३ ते व्हावना ४ आणि अर्द्धावसावा ५ ते
 व्हावना ५ या प्रमाणे, आनी अर्द्धावसावा ४००० रुपये निघाला, तेव्हा संगळ
 ये कितीने सांग.

उत्तर. ९५००० रुपये.

एक पाचव्यावसावा, एक कुत्रा आणि एक ससा असे एक होताना ४० या
 होताने अंतराने होताने, तो ससा कुत्र्यास पाहून भवाने पळू लागला, त्यास आरंभी कु
 त्र्याने पाहिले नव्हते, परंतु ४० सेकंद येत्यानंतर पाहिले, आणि त्यास धरावे या
 बुद्धीने त्याने मागे पाळू लागला, या प्रमाणे दोघां व्हावना गेले, त्यांत ससाचे पांढरे
 चायेम १ अवरांत १० मैल आणि कुत्र्याचे पांढरे पांढरे १ अवरांत १० मैल आह
 उरेंद कुत्र्याने त्या ससास धरिले, ते व्हावना कुत्र्याचा मूलागलास पासून ससास धरिप
 त मध्ये काळवितो गेला, व कुत्र्या किती चातिलाने सांग.

उत्तर. ६० सेकंद आणि १३० यार्ड.

चाकिस्तावा, दोन भले वन गीचे पुत्र ३ व्यहीन होताने त्या दोघांस एकासरव
 रांत एक समयाचे दोन स्पर्धी समान भासां उद्योग मिळाले ते व्हावना त्यांची वय १०
 वर्षांची होती, त्यांत एक आविरेकी ना आपले भासां पक्षां प्रतिवर्षी १०० रुपये अ
 धा करवून देता, परंतु त्याने मनांत तो फांचा पैका बुडवासा ही गोष्ट वाईट समजून
 प्रतिवर्षी त्या अधिक रक्कचे केले रुक्याचे दरशेकडा दरवर्षीस व्याज रुपये ५ प्र
 माणे रक्कतसिद्ध आपले जिवाना विमा दरशेकडा रुपये ५ प्रमाणे करीत असे.
 आणि दुसरा विवेकी होताना तो प्रतिवर्षी आपले भासां नूब १०० रुपये संग्रह
 करून ते दरशेकडा दरसास व्याज रुपये ५ प्रमाणे करवीत असे.

नंतर त्या दोघांची ५० पन्नास वर्षांची वय झाली ते व्हावना परस्पर भेटले, ते
 समयां सरकारांतून प्रत्येकाची भासा प्रतिवर्षी ४००० रुपये होती, ते परस्पर गो
 ळीकरून लागले, तेथे आविरेक्याने भासा पक्षां अधीन रक्कचे केला ही आपली चूक
 पदराचे दून निश्चय केला की, आज पासून जुने कर्जाचे व्याज वजीवाने विम्याचा
 ऐवज देवून जे भासांतून बाकी राहील तिन्ही वजात आपला रक्कचे चालवीन, आणि
 विवेक्याने निश्चय केला की, आजपर्यंत संग्रह झाल्या आहे, तिन्ही मुद्दल राखून
 त्याचे व्याज दर सरकाव संवधा भासां हे सर्व रक्कचे करान.

आतां पुढे आविरेकी आस प्रतिवर्षी रक्कचे किती रुपये राहानात, आणि
 विवेकी याजक किती रुपये संग्रह आहे, व प्रतिवर्षी त्याचा रक्कचे किती होतो,
 तो सांग.

जा. २.

उत्तर. आविरेक्यास प्रतिवर्षी रक्कचे यास १०००० २. १० राहानात
 विवेक्यास प्रतिवर्षी रक्कचे यास ४३७५ ३. ५३ होताना.
 आणि याजक संग्रह ७५२५ ४. ५० आहे.

